

Θέματα Πανελλαδικών Εξετάσεων
Μαθηματικά Κατεύθυνσης
2000 – 2023

Ημερήσια – Εσπερινά και Επαναληπτικές Εξετάσεις

Επιμέλεια: Χατζόπουλος Μάκης

http:// lisari.blogspot.com

Έκδοση: 25 Δεκεμβρίου 2023

Θέματα Πανελλαδικών Εξετάσεων Μαθηματικά Κατεύθυνσης 2000 – 2023

Ημερήσια – Εσπερινά και Επαναληπτικές Εξετάσεις

Επιμέλεια: Χατζόπουλος Μάκης

http:// lisari.blogspot.com

Έκδοση: 25 Δεκεμβρίου 2023

Από την θέση του επιμελητή πρέπει να ευχαριστώ όλους του συναδέλφους, όλα τα site, όλα τα blog που προσφέρουν το υλικό των Πανελλαδικών εξετάσεων σε word. Χωρίς την συμβολή τους δεν θα υπήρχε αυτή η συλλογή.

Θα προσπαθήσω να ανακαλέσω τα site, blog και Φροντιστήρια που έχω επισκεφτεί και έχω αποθηκεύσει κατά καιρούς το υλικό τους στο σκληρό μου δίσκο.

Ας με συγχωρέσουν κάποιοι αν τους ξέχασα, δεν έχω κακή πρόθεση, αλλά ασθενής μνήμη.

Ευχαριστώ πολύ

- *αρχικά την ομάδα μου, την* ***lisari team*** *που χωρίς την βοήθεια τους δεν θα είχα κάποια σπάνια θέματα (επαναληπτικά θέματα εσπερινών κτλ., ο* ***Γιάννης Κάκανος, Γιάννης Ζαμπέλης, Δημήτρης Παπαμικρούλης και ο Ανδρέας Κουλούρης*** *μου παρείχαν το σύνολο των θεμάτων),*
- *το* ***Φροντιστήριο Σύγχρονο*** *που έχει την πλειοψηφία των θεμάτων σε word (έως το 2013)*
- *και αρκετούς συναδέλφους που μου στέλνουν κάθε χρόνο τα θέματα σε word όπως είναι ο* ***Χρήστος Τσουκάτος****.*

Η επιμέλεια όλων των θεμάτων δεν είναι τόσο εύκολη και απλή υπόθεση όπως νομίζετε, δεν είναι μια αντιγραφή – επικόλληση των αρχείων, είναι μια επίπονη και κουραστική εργασία ένωση διαφορετικών πηγών, διαφορετικών μορφοποιήσεων.

Προσοχή! Επειδή η ύλη των Πανελλαδικών εξετάσεων για το σχολικό έτος 2015 – 16 άλλαξε, πολλά θέματα είναι εκτός ύλης. Συμβουλευτείτε τους καθηγητές σας ποια θέματα πρέπει να μελετήσετε.

Μάκης Χατζόπουλος

(…..αφιερωμένο σε όλα τα μαθηματικά site που προσφέρουν σε όλους μας τα πάντα χωρίς ΚΑΜΙΑ ανταμοιβή)

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2000

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α) Πότε ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός ονομάζεται γραμμικός; Μονάδες 2,5

β)Αν Μ(x,y) σημείο του επιπέδου, $\vec{u} = (\alpha,\beta)$ δεδομένο διάνυσμα και Μ΄(x΄,y΄) η εικόνα του Μ στην παράλληλη μεταφορά κατά το διάνυσμα $\vec{u}$,να βρείτε τα x΄,y΄ συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου Μ και του διανύσματος $\vec{u}$. Μονάδες 5

γ)Είναι η παράλληλη μεταφορά γραμμικός μετασχηματισμός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. Μονάδες 5

Β1.Να γράψετε στο τετράδιό σας το μετασχηματισμό της στήλης Ι και δίπλα τον αριθμό της στήλης ΙΙ που αντιστοιχεί στον πίνακα του μετασχηματισμού.

Στήλη Ι	Στήλη ΙΙ
T_1: «συμμετρία ως προς τον άξονα x΄x»	1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
T_2: «στροφή κατά γωνία π/2»	2. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
	3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Μονάδες 3

Β2.Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό Τ με πίνακα $A = A_1A_2 - A_2A_1$, όπου A_1, A_2 οι πίνακες των μετασχηματισμών T_1, T_2 αντιστοίχως, του ερωτήματος **Β1**.

α)Να δείξετε ότι ο Τ είναι κανονικός μετασχηματισμός. Μονάδες 4,5

β)Να βρείτε την εικόνα της ευθείας ε: $2x - y + 5 = 0$ μέσω του μετασχηματισμού Τ.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{5+i}{2+3i}$

α) Να γράψετε τον z στη μορφή $\alpha + \beta i$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Μονάδες 4

β) Να γράψετε τον z στην τριγωνομετρική του μορφή. Μονάδες 5

Στις ερωτήσεις γ), δ) να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό του θέματος και της κάθε ερώτησης και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

γ) Αν $\theta = \text{Arg}z$, τότε ο μιγαδικός αριθμός iz έχει όρισμα:

Α. $\dfrac{\pi}{4} - \theta$ Β. $\dfrac{\pi}{2} + \theta$ Γ. $\theta - \dfrac{\pi}{2}$ Δ. $\pi + \theta$ Μονάδες 3

δ) Το z^4 είναι ίσο με: Α. 4 Β. 4i Γ. - 4i Δ. -4 Μονάδες 3

Β. Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου, που είναι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει: $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1$. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16 & , \quad 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2)\ln(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1)\, e^{5-x}, & x \geq 5 \end{cases}$$

Α. Να βρεθούν τα, $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$. Μονάδες 6

Β. Να βρεθούν τα α, β∈R, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$. Μονάδες 10

Γ. Για τις τιμές των α, β του ερωτήματος **Β** να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω f(t) η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου $t \geq 0$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f(t) είναι

$$\frac{8}{t+1} - 2$$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση f(t). Μονάδες 6

β) Σε ποια χρονική στιγμή t, μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη; Μονάδες 6

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή t = 8 υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή t = 10 η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται $\ln 11 \cong 2{,}4$). Μονάδες 13

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 15 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 . Να αποδείξετε ότι: $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$ Μονάδες 5

Α2. Αν $z_1 = \rho_1$ (συνθ_1 + iημθ_1) και $z_2 = \rho_2$ (συνθ_2 + iημθ_2) δύο μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή, να γράψετε τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα:

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\frac{z_1}{z_2}$	1. $\rho_1\rho_2[\eta\mu(\theta_1+\theta_2)+i\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)]$
β. $z_1 \cdot z_2$	2. $\rho_1^\nu\ [\sigma\upsilon\nu(\nu\theta_1)+i\eta\mu(\nu\theta_1)]$
γ. z_1^ν	3. $\frac{\rho_1}{\rho_2}[\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)+i\eta\mu(\theta_1-\theta_2)]$
	4. $\frac{\rho_1}{\rho_2}[\sigma\upsilon\nu(\theta_1-\theta_2)+i\eta\mu(\theta_1-\theta_2)]$
	5. $\rho_1\rho_2[\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)+i\eta\mu(\theta_1+\theta_2)]$
	6. $\rho_1^\nu\ [\eta\mu(\nu\theta_1)-i\sigma\upsilon\nu(\nu\theta_1)]$

Μονάδες 7,5

Β1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί: $z_1 = 2$ (συν $\frac{2\pi}{3}$ + iημ$\frac{2\pi}{3}$) και z_2 = συν $\frac{5\pi}{3}$ + iημ$\frac{5\pi}{3}$.

Τότε το πηλίκο $\frac{z_1}{z_2}$ είναι ίσο με: Α: 2 Β: 2i Γ: -2 Δ: -2i Ε: 2 (1-i)

Μονάδες 4,5

Β2. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = 1 + i$. Να υπολογίσετε το z^{16}. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Θεωρούμε τον πίνακα Α διάστασης $(\kappa^2 - 2\kappa - 1) \times (\kappa + 2\lambda - 3)$ και τον πίνακα Β διάστασης $(\lambda + 1) \times (3\kappa - \kappa^2 + 2)$, όπου κ και λ θετικοί ακέραιοι.

α. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα κ και λ, για να ορίζεται το γινόμενο Α · Β

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ και τις διαστάσεις των πινάκων Α και Β, για να ορίζονται τα γινόμενα Α · Β και Β · Α Μονάδες 10

Β. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Να αποδείξετε ότι: **α.** $A^2 = -I$, όπου Ι ο μοναδιαίος 2 × 2 πίνακας. Μονάδες 4

β. $2A^{2004} + A^{2001} + A^{1999} = 2I$, όπου Ι ο μοναδιαίος 2 × 2 πίνακας. Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - \alpha}$, όπου α πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η συνάρτηση f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία x = 4. Μονάδες 5

β. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(1,0) να διέρχεται από το σημείο Α(-2,3). Μονάδες 10

γ. Αν α > 2, να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός $x_0 \in (1,2)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x_0 να είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα διαγωνισμό ενός Οργανισμού για την πρόσληψη προσωπικού, συγκεντρώθηκαν 1.000 γραπτά υποψηφίων. Κάθε γραπτό διορθώνεται από δύο διαφορετικούς βαθμολογητές. Κάθε βαθμολογητής διορθώνει 4 φακέλους των 25 γραπτών την ημέρα. Για τη διόρθωση κάθε γραπτού ο βαθμολογητής αμείβεται με 200 δραχμές. Τη διόρθωση συντονίζουν δύο επόπτες που αμείβονται με 4.000 δραχμές την ημέρα. Στο τέλος της διόρθωσης όλων των γραπτών, κάθε βαθμολογητής παίρνει επί πλέον ως επίδομα 10.000 δραχμές ανεξάρτητα από τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκε.

α. Να αποδείξετε ότι το κόστος Κ(x) σε χιλιάδες δραχμές για τη διόρθωση όλων των γραπτών, δίνεται από τη συνάρτηση: $K(x) = 10\left(x + \dfrac{16}{x} + 40\right)$ όπου x ο αριθμός των βαθμολογητών που απασχολούνται. Μονάδες 13

β. Πόσοι πρέπει να είναι οι βαθμολογητές, ώστε το κόστος της διόρθωσης να είναι ελάχιστο; Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το ελάχιστο κόστος του **β.** ερωτήματος και τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκαν οι βαθμολογητές για τη διόρθωση των γραπτών. Μονάδες 4

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
(ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z= α + βi όπου $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$.

Στη στήλη Ι του επόμενου πίνακα δίνονται ορισμένα σύμβολα και παραστάσεις που έχουν σχέση με το μιγαδικό αριθμό z. Κάθε ένα από αυτά είναι ίσο με μία μόνο από τις εκφράσεις που δίνονται στη στήλη ΙΙ

ΣΤΗΛΗ Ι	ΣΤΗΛΗ ΙΙ
Α. Re(z)	**1.** $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$
Β. $\lvert z \rvert$	**2.** β
Γ. $\overline{z}$	**3.** βi
Δ. $z\,\overline{z}$	**4.** α - βi
Ε. $z + \overline{z}$	**5.** $\alpha^2 + \beta^2$
ΣΤ. $z - \overline{z}$	**6.** α
Ζ. Im(z)	**7.** 2α
	8. 2βi
	9. -α + βi

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της πρώτης στήλης και, δίπλα ακριβώς, τον αριθμό της δεύτερης στήλης που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. *Μονάδες 14*

Β. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z = 3-4i. Να βρείτε :

α) το πραγματικό μέρος Re(z) και το φανταστικό μέρος Im(z) του μιγαδικού αριθμού z *Μονάδες 3*

β) τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού z *Μονάδες 4*

γ) το μέτρο |z| του μιγαδικού αριθμού z. *Μονάδες 4*

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

α) Να δείξετε ότι ισχύει $A^2 = 2A - I$. Μονάδες 9

β) Να δείξετε ότι ισχύει $A(2I - A) = I$. Μονάδες 8

γ) Να βρείτε τον πίνακα X ώστε να ισχύει $2X - I = A^2$. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

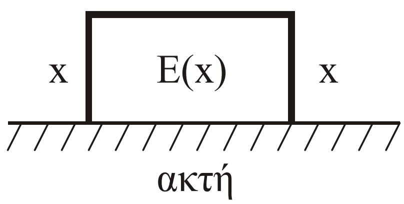
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

α) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \to 1} f(x)$. *Μονάδες 12*

β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f . *Μονάδες 13*

ΘΕΜΑ 4ο

Ένας ιχθυοκαλλιεργητής πήρε άδεια να χρησιμοποιήσει μία θαλάσσια περιοχή σχήματος ορθογωνίου την οποία θα περιφράξει με δίχτυ μήκους 600 μέτρων. Μόνο οι τρεις από τις τέσσερις πλευρές πρόκειται να



περιφραχτούν με δίχτυ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E(x) της θαλάσσιας περιοχής που θα χρησιμοποιηθεί δίνεται από τον τύπο $E(x) = -2x^2 + 600x$ (υποθέτουμε ότι $0 < x < 300$). *Μονάδες 6*

β) Να υπολογίσετε την τιμή του x έτσι ώστε το εμβαδόν E(x) της περιοχής να γίνει μέγιστο. *Μονάδες 14*

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού. *Μονάδες 5*

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α $(x_0, f(x_0))$. Μονάδες 4

Α2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ,τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Μονάδες 8,5

Β1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f΄ είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

β. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0,τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

γ. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0,τότε η f΄ είναι συνεχής στο x_0. Μονάδες 4,5

Β2. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0.*

Στήλη Α συναρτήσεις	Στήλη Β εφαπτόμενες
α. $f(x)=3x^3$, $x_0=1$	1. $y=-2x+\pi$
β. $f(x)=ημ2x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$	2. $y=\frac{1}{4}x+1$
γ. $f(x)=3\|x\|$, $x_0=0$	3. $y=9x-6$
δ. $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=4$	4. $y=-9x+5$
	5. δεν υπάρχει

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\frac{2z+i}{\bar{z}-2i}, z\in C$ με $z\neq -2i$, όπου $\bar{z}$ ο συζυγής του z.

α. Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών:

$w_1=f(9-5i)$ και .. Μονάδες 6

β. Θεωρούμε τον πίνακα $M=\frac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix}|w_1| & 0\\ 0 & -|w_1|\end{bmatrix}$ όπου $|w_1|$ το μέτρο του μιγαδικού αριθμού w_1 του ερωτήματος **α**.

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή πρόταση.

Ο γραμμικός μετασχηματισμός Τ με πίνακα Μ είναι:

Α. στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και γωνία $\theta=\frac{\pi}{4}$

Β. συμμετρία ως προς τον άξονα x΄x

Γ. συμμετρία ως προς τον άξονα y΄y

Δ. συμμετρία ως προς την ευθεία y=x

Ε. ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και λόγο $\lambda=\frac{\sqrt{2}}{3}$. Μονάδες 5

γ. Αν Μ ο πίνακας του ερωτήματος **β**, τότε να βρεθεί ο πίνακας Χ ώστε να ισχύει: ΜΧ=Κ όπου Κ είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και γωνία $\theta=\frac{\pi}{2}$. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0,1] και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Αν f(0)=2 και f(1)=4, να δείξετε ότι:

α. η ευθεία y=3 τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$. Μονάδες 7

β. υπάρχει $x_1\in(0,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1)=\frac{f(1/5)+f(2/5)+f(3/5)+f(4/5)}{4}$ Μονάδες 12

γ. υπάρχει $x_2\in(0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2,f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία y=2x+2000. Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Τη χρονική στιγμή t=0 χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $f(t)=\frac{\alpha t}{1+\left(\frac{t}{\beta}\right)^2}$,$t\geq 0$

όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β. Μονάδες 15

β. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά. Μονάδες 10

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

α. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ. Μονάδες 8

β. Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της συνάρτησης f ;

Μονάδες 4,5

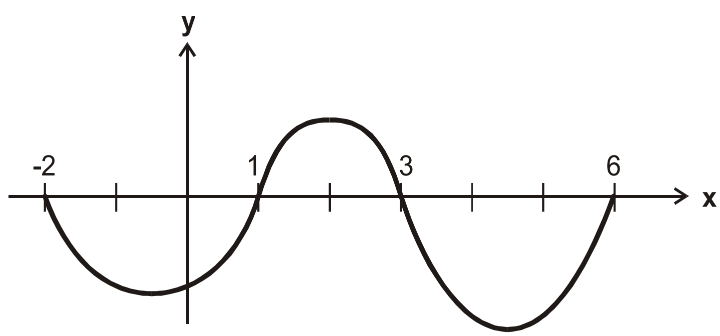
Β1.*Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Η συνάρτηση $f(x)=e^{1-x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Μονάδες 2,5

β. Η συνάρτηση f με $f'(x) = -2ημx+\dfrac{1}{ημ^2x} + 3$, όπου $x\in[\dfrac{\pi}{2},\pi)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Μονάδες 2,5

γ. Αν $f'(x) = g'(x) + 3$ για κάθε $x\in Δ$, τότε η συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ. Μονάδες 2,5

Β2.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f στο διάστημα



[-2,6].

Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αν z_1 , z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2+2z+2=0$, να αποδείξετε ότι $z_1^{20} - z_2^{20} = 0$.

Μονάδες 12

β. Αν z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης του **α.** ερωτήματος, με φανταστικό μέρος θετικό αριθμό, να βρείτε τις τιμές του θετικού ακεραίου ν για τις οποίες $z_1^{ν}$ είναι πραγματικός αριθμός. Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον πίνακα της συμμετρίας με την οποία μπορεί να προκύψει από την εικόνα της ρίζας z_1 η εικόνα της ρίζας z_2. Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-e^{2x}+1}{ημ2x} = 5$.

α. Να βρείτε το f(0). Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$. Μονάδες 9

γ. Αν $h(x)=e^{-x}f(x)$, να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα σημεία A(0,f(0)) και B(0,h(0)) αντίστοιχα είναι παράλληλες.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Η τιμή P (σε χιλιάδες δραχμές) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνεται από τον τύπο $P(t) = 4 + \dfrac{t-6}{t^2+\frac{25}{4}}$.

α. Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

Μονάδες 2

β. Να βρείτε το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται.

Μονάδες 10

γ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη.

Μονάδες 8

δ. Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται, χωρίς όμως να μπορεί να γίνει μικρότερη από την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά. Μονάδες 5

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣΔ' ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. ***α.*** Αν Α είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, να δείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$A\,X = B \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}\hat{A}$ *Μονάδες 6,5*

β. *Στις επόμενες δύο ερωτήσεις να γράψετε τον αριθμό της ερώτησης (**1.Α.β.1** και **1.Α.β.2**) και δίπλα ακριβώς, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

1. Ο πίνακας $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν

Α. $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0$ **Β.** $\beta = \delta = 0$ **Γ.** $\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = 0$ **Δ.** $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$ **Ε.** $\alpha = \gamma = 0$ *Μονάδες 3*

2.Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ με ορίζουσα $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$.Ο αντίστροφος του πίνακα Α, αν υπάρχει, δίνεται από τον τύπο:**Α.** $A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$ **Β.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$ **Γ.** $A^{-1} = D \cdot \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$ **Δ.** $A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \delta & \beta \\ \gamma & \alpha \end{bmatrix}$ **Ε.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} \delta & \beta \\ \gamma & \alpha \end{bmatrix}$ *Μονάδες 3*

Β. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

α. Να αποδείξετε ότι ο αντίστροφος του πίνακα Α είναι ο πίνακας $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Μονάδες 6

β. Να λύσετε την εξίσωση $A\,X = B$ *Μονάδες 6,5*

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 7 + 8\,i$ και $z_2 = 4 - 5\,i$.

α. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό $z_1 \cdot z_2$. *Μονάδες 8*

β. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό $\frac{z_1}{z_2}$. *Μονάδες 8*

γ. Αν $z = z_1 - \overline{z}_2$ να γράψετε το μιγαδικό αριθμό z σε τριγωνομετρική μορφή και στη συνέχεια να υπολογίσετε τον αριθμό z^4. *Μονάδες 9*

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x-1}, & x<1 \\ \alpha x-2\alpha+3, & x\geq 1 \end{cases}$.

α. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$

Μονάδες 13

β. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x\to -2} f(x)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$. *Μονάδες 12*

ΘΕΜΑ 4ο

Η κατανάλωση σε λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα ενός κινητήρα, όταν αυτός λειτουργεί με x χιλιάδες στροφές ανά λεπτό, δίνεται από τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-x+10$, $1<x<5$.

α. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία έχουμε τη μικρότερη κατανάλωση, καθώς επίσης και πόση είναι η κατανάλωση αυτή. *Μονάδες 13*

β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης του αυτοκινήτου για $x_1 = 2$ και για $x_2 = 4$ (δηλαδή για 2.000 στροφές ανά λεπτό και 4.000 στροφές ανά λεπτό αντίστοιχα). *Μονάδες 12*

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 7,5

Α2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*
Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α. $|z|^2 = z\bar{z}$ **β.** $|z^2| = z^2$ **γ.** $|z| = -|\bar{z}|$ **δ.** $|z| = |\bar{z}|$ **ε.** $|i\bar{z}| = |z|$ Μονάδες 5

Β1. Αν $z_1 = 3 + 4i$ και $z_2 = 1 - \sqrt{3}\,i$, να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $\lvert z_1 \cdot z_2 \rvert$	**α.** 4
2. $\lvert z_1^2 \rvert$	**β.** 2
3. $\lvert z_2 \rvert^2$	**γ.** 25
4. $-\lvert \bar{z_1} \rvert$	**δ.** -5
5. $\lvert i z_2 \rvert$	**ε.** -2
	στ. 5
	ζ. 10

Μονάδες 7,5

Β2. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \le 3 \\ \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι α = –1/9. Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο Α(4, f(4)). Μονάδες 7

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1 και x=2. Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών **R**, ισχύει ότι: $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα. Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Μονάδες 8

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (0,1). Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών **R**, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$

ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt)\,dt$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} - x^2$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

α. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2xf^2(x)$ Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή. Μονάδες 4

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Μονάδες 4

δ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} (x\, f(x)\, \eta\mu 2x)$. Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2001

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1.΄Εστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής:G(x)=F(x)+C, $C\in\mathbb{R}$είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή: G(x)=F(x)+C, $C\in\mathbb{R}$

Μονάδες 6,5

Α2. Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

α. $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \ldots..$ **β.** $\int_\alpha^\beta \big(f(x)+g(x)\big)dx = \ldots..$ **γ.** $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \ldots..$

όπου $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$και f,g συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β] Μονάδες 6

Β1.Να βρείτε τη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει f΄΄(x)=6x+4, $x\in\mathbb{R}$και η γραφική της παράσταση στο σημείο της Α(0,3) έχει κλίση 2. Μονάδες 6,5

Β2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

α. $\left(e^x + x\right)dx$

Μονάδες 2

β. $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}}\,dx$

Μονάδες 2

γ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x\right)\,dx$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z+16| = 4|z+1|$ Μονάδες 9

β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z-1| = |z-i|$ Μονάδες 9

γ. Να τρέψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς που επαληθεύουν συγχρόνως τις σχέσεις των ερωτημάτων (α) και (β). Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+\alpha, & x\leq 1 \\ \left(1-e^{-x+1}\right)\ln(x-1), & x\in(1,2] \end{cases}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-e^{-x+1}}{x-1}$ Μονάδες 7

β. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_o=1$. Μονάδες 11

γ. Για α=-1 να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Α(ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\int_1^x \frac{tf(t)}{x^2}\,dt \text{ με } x>0$$

α. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Μονάδες 3

β. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x},\ x>0$ Μονάδες 7

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. Μονάδες 6

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. Μονάδες 4

ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1, x=e. Μονάδες 5

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α)Αν $z_1 = \rho_1$ (συν θ_1 + i ημθ_1) και $z_2 = \rho_2$ (συν θ_2 + i ημθ_2) είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή, να αποδείξετε ότι:

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2$ [συν $(\theta_1+\theta_2)$+i ημ $(\theta_1+\theta_2)$] *Μονάδες 6,5*

β)Αν $z = \alpha + \beta i$ με $\alpha, \beta \in$ **R**, είναι ένας μιγαδικός αριθμός, να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** του επόμενου πίνακα, και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Ι		**Στήλη ΙΙ**	
Α.	Re(z)	**1.**	$-\alpha - \beta i$
Β.	Im(z)	**2.**	$\alpha - \beta i$
Γ.	$-z$	**3.**	$\alpha + \beta$
Δ.	$\overline{z}$	**4.**	α
Ε.	$\lvert z \rvert$	**5.**	$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$
ΣΤ.	$z \cdot \overline{z}$	**6.**	$\alpha^2 + \beta^2$
		7.	β

Μονάδες 6

Β. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = i$.

α)Να γράψετε τους z_1 και z_2 σε τριγωνομετρική μορφή. *Μονάδες 8*

β)Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή του γινομένου $z_1 \cdot z_2$. *Μονάδες 4,5*

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3,\ x \in R$.

α)Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y. *Μονάδες 7*

β)Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α (3, f(3)) . *Μονάδες 9*

γ)Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f. Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f: **R**→**R**, για την οποία ισχύει $2 - x^4 \leq f(x) \leq 2 + x^4$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0) = 2$ Μονάδες 6

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$. *Μονάδες 9*

γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα τουριστικό λεωφορείο έχει να διανύσει απόσταση 625 km με σταθερή ταχύτητα x km την ώρα. Σύμφωνα με τον Κώδικα Οδικής Κυκλοφορίας το μέγιστο όριο ταχύτητας είναι 90 km την ώρα. Τα καύσιμα κοστίζουν 160 δραχμές το λίτρο, η ωριαία κατανάλωση είναι $\left(5,5 + \frac{x^2}{200}\right)$ λίτρα και η αμοιβή του οδηγού είναι 2000 δραχμές την ώρα.

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος K (x) της διαδρομής είναι: $K(x) = \frac{1800000}{x} + 500x$, $0 < x \leq 90$. *Μονάδες 12*

β)Να βρείτε την ταχύτητα του λεωφορείου για την οποία το κόστος της διαδρομής γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες 13

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 6 ΙΟΥΛΙΟΥ 2001

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α) Να αποδείξετε ότι, αν $z_1 = α + βi$ και $z_2=γ+δi$, όπου $α, β, γ, δ \in \mathbf{R}$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, τότε $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ *Μονάδες 6,5*

β) Αν $z = α + βi$, όπου $α, β \in \mathbf{R}$, είναι ένας μιγαδικός αριθμός, να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** του επόμενου πίνακα, και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Ι	**Στήλη ΙΙ**
Α. $z+\overline{z}$	**1.** $α-β$
Β. $z-\overline{z}$	**2.** $2α$
Γ. $z\cdot\overline{z}$	**3.** $2βi$
Δ. $\lvert\overline{z}\rvert$	**4.** $α+β$
	5. $\sqrt{α^2+β^2}$
	6. $α^2+β^2$

Μονάδες 6

Β. α)Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = k + 15i$ και $z_2 = 5+λi$, όπου $k, λ \in \mathbf{R}$. Να βρείτε τις τιμές των k και λ, ώστε να ισχύει $z_1=5\overline{z_2}$.Μονάδες 6

β)Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z, ώστε να ισχύει $z\cdot\overline{z} + (z-\overline{z}) = 5 +2i$.

Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση $f(x) = x^2 - kx + 1$, όπου $x \in R$.

α) Να βρείτε την τιμή του k, για την οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Α (1,0). *Μονάδες 12*

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Β (0, f(0)), όταν k=17. *Μονάδες 13*

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{2}{1+i}$

α) Να γράψετε τον μιγαδικό αριθμό z στη μορφή z=x+yi, όπου $x, y \in$ **R**. *Μονάδες 8*

β) Να γράψετε σε τριγωνομετρική μορφή τον μιγαδικό αριθμό z. *Μονάδες 8*

γ) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο K(2,0) και ακτίνα ρ = $\sqrt{2}$. Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, όπου $x \in$ **R**

α) Να βρείτε την παράγωγο f΄(x). *Μονάδες 5*

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση f.*Μονάδες 12*

γ) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. *Μονάδες 8*

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2002

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$. Μονάδες 12

Β1. Έστω η συνάρτηση f(x) = ημx. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει f΄(x) = συνx . Μονάδες 8

Β2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α, β] και συνεχής στο (α, β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α, β] μία μέγιστη τιμή. Μονάδα 1

β. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη. Μονάδα 1

γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. Μονάδα 1

δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε $\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$ Μονάδα 1

ε. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε f(x) > 0 κοντά στο x_0 . Μονάδα 1

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^{\nu} z$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α. Να δείξετε ότι f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0 . Μονάδες 7

β. Αν $|z| = \rho$ και Arg(z) = θ, να δείξετε ότι $f(13) = \rho\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]$. Μονάδες 8

γ. Αν $|z| = 2$ και Arg(z) = $\frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0, z και f(13). Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.

α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1. Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα. Μονάδες 18

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο [α, β]. Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε και $\int_\alpha^\beta h(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$. Μονάδες 2

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

i) Να εκφραστεί η f΄ ως συνάρτηση της f. Μονάδες 5

ii) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$, για κάθε $x > 0$. Μονάδες 12

iii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x = 0, x = 1 και τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$.Μονάδες 6

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2002

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $z_1 = \rho_1(\text{συν}\theta_1 + i\text{ημ}\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\text{συν}\theta_2 + i\text{ημ}\theta_2)$ είναι δύο μιγαδικοί σε τριγωνομετρική μορφή, τότε να αποδείξετε ότι: $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2\,[\text{συν}(\theta_1+\theta_2) + i\text{ημ}(\theta_1+\theta_2)]$. Μονάδες 15

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$, τότε κατ’ ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. Μονάδες 2

β. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα. Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα [α, β] , στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle. Μονάδες 2

δ. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] και σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 2

ε. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε κατ’ ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$. Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν. Μονάδες 5

γ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με τύπο

$$f(x)=\frac{|x-z|^2-|x+\bar{z}|^2}{x^2+|z|^2}$$

όπου z συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός z = α + βi, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, με $\alpha\neq 0$.

α. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)$. Μονάδες 8

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f, εάν $|z+1|>|z-1|$. Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις: $f''(x)f(x)+(f'(x))^2=f(x)f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=2f'(0)=1$.

α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f. Μονάδες 12

β. Αν g είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα [0,1], να δείξετε ότι η εξίσωση $2x-\int_0^x\frac{g(t)}{1+f^2(t)}\,dt=1$ έχει μία μοναδική λύση στο διάστημα [0,1]. Μονάδες 13

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣΔ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει: $(f+g)'(x_o) = f'(x_o)+g'(x_o)$ *Μονάδες 9*

Β. *Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λ**, αν αυτή είναι λανθασμένη.*

1.Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Μονάδες 2

2.Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_o, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Μονάδες 2

3.Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)=0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ. Μονάδες 2

4.Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. Μονάδες 2

5.Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_o, τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_o}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to x_o}f(x)+\lim_{x\to x_o}g(x)$$ Μονάδες 2

6.Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_o, τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_o}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to x_o}f(x)-\lim_{x\to x_o}g(x)$$ Μονάδες 2

7.Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta i$ ισχύει : $|z|=\alpha^2+\beta^2$ Μονάδες 2

8.Για το μιγαδικό αριθμό i ισχύει : $i^4 = 1$. Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = -1+i$, $z_2 = 3-4i$

α. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό z_1+5z_2 *Μονάδες 6*

β. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό $\dfrac{z_2}{\bar{z}_1}$ *Μονάδες 6*

γ. Να αποδείξετε ότι το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού z_1 είναι: $Arg(z_1)=\dfrac{3\pi}{4}$

Μονάδες 6

δ. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό z_1^8 . Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\left(-1, f(-1)\right)$. *Μονάδες 5*

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (0 , 1) .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 4x}{x - 2}, & \text{αν } x < 2 \\ -x^2 + k, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$ όπου $k \in R$. Να βρείτε :

α. το k, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, *Μονάδες 7*

β. το όριο $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, *Μονάδες 5*

γ. το ρυθμό μεταβολής της f στο $x_0 = 4$ και *Μονάδες 5*

δ. την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης συνάρτησης $g(x) = \dfrac{f(x)}{x+3}$ στο $-\infty$.

Μονάδες 8

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 29 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Μονάδες 8

Β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 7

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\overline{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z|=|\overline{z}|=|-z|$

Μονάδες 2

β. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ. Μονάδες 2

γ. Για κάθε συνάρτηση f,παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει $\int f'(x)dx = f(x)+c$

$,c\in\mathbb{R}$ Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση. Μονάδες 2

ε. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0. Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $w=3z-i\overline{z}+4$, όπου $\overline{z}$ είναι ο συζυγής του z.

α. Να αποδείξετε ότι $Re(w)=3\alpha-\beta+4$, $Im(w)=3\beta-\alpha$. Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$, έχει το ελάχιστο μέτρο. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5+x^3+x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση. Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x)\geq f(1+x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}. Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x=3$. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β] που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β). Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma\in(\alpha, \beta)$, $\delta\in(\alpha, \beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma)\cdot f(\delta)<0$, να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) =0$ στο διάστημα (α, β). Μονάδες 8

β. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$. Μονάδες 9

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. Μονάδες 8

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2003

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α. όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x)+c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ

β. κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x)+c$, $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα

$\left||z_1| - |z_2|\right| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$. Μονάδες 2

β. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν $f'(x) > 0$ στο $(α, x_0)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_0, β)$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f . Μονάδες 2

γ. Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1−1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε x_1, $x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$. Μονάδες 2

δ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$. Μονάδες 2

Γ. Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ; Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z| = 2$ και $\mathrm{Im}(z) \ge 0$. Μονάδες 12

β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα x΄x . Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

α. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Μονάδες 5

β. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν το x τείνει στο $-\infty$. Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$. Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx = \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x) = -f(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη . Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μοναδική ρίζα. Μονάδες 8

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$.Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x΄x, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° . Μονάδες 9

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω η συνάρτηση f(x) = εφx.Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1 = \mathbf{R} - \{x \mid συνx = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{συν^2x}$. Μονάδες 10

Β. *Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.*

1. Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z = x + yi, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, δίνεται από τον τύπο $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση y = f(x), όταν f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

3. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο $(α, x_0)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_0, β)$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

4. Ο συζυγής κάθε μιγαδικού αριθμού z = x + yi, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, είναι ο μιγαδικός $\bar{z} = -x + yi$.

5. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \quad , \text{ εφόσον } \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0 .$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 2}$, $x \in \mathbf{R} - \{2\}$.

α. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$. *Μονάδες 7*

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία y = x – 1 είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$. *Μονάδες 8*

γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$. *Μονάδες 10*

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 5 \\ 10x - 25, & \text{αν } x \geq 5 \end{cases}$ και το σημείο $x_0 = 5$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 5$ και να βρείτε την $f'(5)$.*Μονάδες 8*

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(5, f(5)). *Μονάδες 4*

δ. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f . *Μονάδες 8*

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί και $w = \frac{i\,(i+z)}{i-z}$ με $z \neq i$.Να αποδείξετε ότι : **α.** $w = \frac{2x}{x^2+(y-1)^2} + \frac{1-x^2-y^2}{x^2+(y-1)^2}\,i$, Μονάδες 8

β. αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο κέντρου O(0 , 0) και ακτίνας $\rho_1 = 1$ Μονάδες 8

γ. αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο κέντρου O(0 , 0) και ακτίνας $\rho_2 = 1$. Μονάδες 9

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 27 ΜΑΪΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ καιx_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$ Μονάδες 10

Β. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους. Μονάδες 2

β. $\lim_{x\to x_0} f(x)=1$, αν και μόνο αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=1$ Μονάδες 2

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0,τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(x_0)$ Μονάδες 2

δ. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 2

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β],τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$ Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2\ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα. Μονάδες 10

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο IR και $f(0)=f(\frac{3}{2}) = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0, \frac{3}{2})$τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-f(\xi)$.

Μονάδες 8

β. Εάν $f(x)=2x^2-3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} g(x)dx$, $\alpha \in IR$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \to -\infty} I(\alpha)$ Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση f: IR → IR τέτοια ώστε $f(1)=1$. Αν για κάθε $x \in IR$,

ισχύει $g(x) = \int_{1}^{x^3} |z| f(t)dt - 3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1) \geq 0$ όπου $z=\alpha+\beta i \in C$, με $\alpha, \beta \in IR^*$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο IR και να βρείτε τη g'. Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι $|z| = \left|z+\frac{1}{z}\right|$ Μονάδες 8

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος **β** να αποδείξετε ότι $Re(z^2) = -\frac{1}{2}$

Μονάδες 6

δ. Αν επιπλέον $f(2)=\alpha>0$, $f(3)=\beta$ και $\alpha>\beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. Μονάδες 6

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ. Μονάδες 9

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Μονάδες 2

β. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους. Μονάδες 2

γ. Αν *f*, *g* είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού IR και ορίζονται οι συνθέσεις *fog* και *gof*, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες. Μονάδες 2

δ. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄. Μονάδες 2

ε. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0, με $k \in$ IN και $k \geq 2$. Μονάδες 2

Γ. Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση f: IR → IR με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, όπου $m \in$ IR , $m > 0$.

α. Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in$ IR . Μονάδες 13

β. Αν m = 10, να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 0 και x = 1. Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται μια συνάρτηση f: [α, β] → IR συνεχής στο διάστημα[α, β] με f(x) ≠ 0 για κάθε x ∈ [α, β] και μιγαδικός αριθμός z με Re(z) ≠ 0, Im(z) ≠ 0 και $|Re(z)| > |Im(z)|$.

Αν $z+\frac{1}{z}=f(\alpha)$ και $z^2+\frac{1}{z^2}=f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι:

α. $|z|= 1$ Μονάδες 11

β. $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$ Μονάδες 5

γ. η εξίσωση $x^3f(\alpha) + f(\beta) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (–1, 1).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [0, +∞) → IR τέτοια, ώστε $f(x)=\frac{x^2}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}}2xf(2xt)dt$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞). Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - (x + 1)$. Μονάδες 7

γ. Να αποδείξετε ότι η f(x) έχει μοναδική ρίζα στο [0, +∞). Μονάδες 5

δ. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Μονάδες 6

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν α + βi, γ+δi είναι μιγαδικοί αριθμοί, όπου α, β, γ, δ $\in$ IR και γ+δi $\neq 0$, να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$ *Μονάδες 9*

Β. *Στον παρακάτω πίνακα, κάθε μιγαδικός αριθμός της **Στήλης Ι** είναι ίσος με ένα μόνο αριθμό της **Στήλης ΙΙ** (δύο αριθμοί στη **Στήλη ΙΙ** περισσεύουν).*

Στήλη Ι	**Στήλη ΙΙ**
Α. i^1	**1.** $-i$
Β. i^2	**2.** $+1$
Γ. i^3	**3.** i
Δ. i^4	**4.** -1
	5. 0
	6. 4

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** του παραπάνω πίνακα και ακριβώς δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ,** ώστε να δημιουργείται η σωστή αντιστοιχία. *Μονάδες 4*

*Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις **Γ,** Δ**, Ε** και **ΣΤ,** να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **(Σ)**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **(Λ)**,αν αυτή είναι λανθασμένη.*

Γ. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε υπάρχει σταθερά
c τέτοια, ώστε για κάθε x $\in$ Δ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$. *Μονάδες 3*

Δ. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1 , $x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.
Μονάδες 3

Ε. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$ *Μονάδες 3*

ΣΤ. Ο συντελεστής διεύθυνσης, λ, της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, της γραφικής παράστασης C_f μιας συνάρτησης f, παραγωγίσιμης στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι $\lambda = f'(x_0)$. *Μονάδες 3*

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση, $f(x)=\begin{cases}4x^2+3, & x<1\\ 6x+k, & x\ge 1\end{cases}$, όπου $k \in IR$.

α. Να βρείτε την τιμή του k, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. *Μονάδες 10*

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$. *Μονάδες 8*

γ. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ, ώστε να ισχύει: $\mu\cdot f'(-5) + f'(5) + 34 = 0$. *Μονάδες 7*

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6\alpha x + \beta$, όπου $x \in IR$ και α, β πραγματικοί αριθμοί. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = -2$ και είναι $f(-2) = 98$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$ και $\beta = 54$. *Μονάδες 6*

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. *Μονάδες 9*

γ. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων της συνάρτησης f. *Μονάδες 4*

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 2)$. *Μονάδες 6*

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $\alpha \in IR$ ώστε να ισχύει: $\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 i=\alpha+(1-\alpha)i$

Να αποδείξετε ότι:

α. αν $Im(z) = 0$, τότε $\alpha = 1$. *Μονάδες 5*

β. αν $\alpha = 0$, τότε $z^2 + 1 = 0$. *Μονάδες 5*

γ. για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει: $0 \le \alpha \le 1$. *Μονάδες 7*

δ. οι εικόνες Μ των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. *Μονάδες 8*

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $z_1 = α + βi$ και $z_2 = γ + δi$, όπου $α,β,γ,δ \in IR$, είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

*Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις **Β,Γ,Δ,Ε** και **ΣΤ** να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **(Σ)**,αν η πρόταση είναι σωστή, ή **(Λ)**, αν αυτή είναι λανθασμένη.*

Β. Αν M1(α, β) και M2(γ, δ) είναι οι εικόνες των α + βi και γ + δi αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών α+βi και γ+δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτινών τους. *Μονάδες 3*

Γ. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = α + βi$, όπου $α,β \in IR$, ισχύει $\overline{z} = -α + βi$.*Μονάδες 3*

Δ. Έστω η συνάρτηση f(x) = συνx , όπου $x \in IR$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = -ημx$. *Μονάδες 3*

Ε. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ. *Μονάδες 3*

ΣΤ. Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} + 2x$, $x \in IR$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 2$ *Μονάδες10*

ii) $f'(0) = 2f(0)$. *Μονάδες 5*

β) Να υπολογίσετε το: $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ *Μονάδες 10*

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{αx^2 + βx + 3}{x - 2}$, $x \in IR - \{2\}$,όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Η γραφική παράσταση Cf της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο A(1,−4) και ισχύει η σχέση $f(3) + 3f(1) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$. *Μονάδες 9*

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Α $(1,-4)$. *Μονάδες 8*

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$. *Μονάδες 8*

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $x = 3-k$ και $y = 2k+1$.

Να αποδείξετε ότι:

α) αν $3\,\text{Re}(z) + 4\,\text{Im}(z) = 3$, τότε $k = -2$. *Μονάδες 9*

β) αν $|z-1| = \sqrt{5}$, τότε $|z| = \sqrt{10}$. *Μονάδες 10*

γ) οι εικόνες Μ των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση. *Μονάδες 6*

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1°

Α.1 Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν

• η f είναι συνεχής στο [α, β] και

• $f(\alpha) \neq f(\beta)$

δείξτε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$. Μονάδες 9

Α.2 Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$; Μονάδες 4

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$. Μονάδες 2

β. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(g(x)\right)$

Μονάδες 2

γ. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} . Μονάδες 2

δ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = +\infty$ Μονάδες 2

ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε ισχύει $\left(\int_\alpha^x f(t)\,dt\right)' = f(x) - f(\alpha)$ για κάθε $x \in \Delta$. Μονάδες 2

στ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

α. Δείξτε ότι: $\overline{z_1} = \dfrac{9}{z_1}$ Μονάδες 7

β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός . Μονάδες 9

γ. Δείξτε ότι: $|z_1+z_2+z_3|=\frac{1}{3}|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|$. Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα . Μονάδες 3

β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda e x$. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ. Μονάδες 7

γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα y΄y, είναι

$E(\lambda)=\frac{e-2}{2\lambda}$. Μονάδες 8

δ. Υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2\cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}$. Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο IR τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση

$$2f'(x) = e^{x-f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$$

α. Να δειχθεί ότι: $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$. Μονάδες 6

β. Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x-t)\,dt}{\eta\mu x}$. Μονάδες 6

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις: $h(x) = \int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)\,dt$ και $g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}$.

Δείξτε ότι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μονάδες 7

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005}\cdot f(t)\,dt = \frac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο (0 , 1).

Μονάδες 6

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ Μονάδες 9

Α.2 Πότε μια συνάρτηση f: A → IR λέγεται “1-1”; Μονάδες 4

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ. Μονάδες 2

β. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o. Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_o) και κοίλη στο (x_o, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_o\ f(x_o))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. Μονάδες 2

γ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους. Μονάδες 2

δ. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά fog ≠ gof. Μονάδες 2

ε. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών $z, \bar{z}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x. Μονάδες 2

στ. Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και λ ∈ IR *, τότε ισχύει: $\int \lambda f(x)dx = \lambda\int f(x)dx$ Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $z_1+z_2=4+4i$ και $2z_1 - \overline{z_2} = 5+5i$, να βρείτε τους z_1, z_2. Μονάδες 10

β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w ισχύουν

$$|z-1-3i| \le \sqrt{2} \text{ και } |w-3-i| \le \sqrt{2}:$$

i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε z = w

Μονάδες 10

ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$. Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι "1-1". Μονάδες 7

β. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία Α(1,2005) και Β(-2,1), να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(-2004 + f(x^2 - 8)\right) = -2$. Μονάδες 9

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $y = -\frac{1}{668}x + 2005$. Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,για την οποία ισχύει $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005$.

α. Να δείξετε ότι:

i. $f(0)=0$ Μονάδες 4

ii. $f'(0)=1$. Μονάδες 4

β. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε: $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \lambda\left(f(x)\right)^2}{2x^2 + \left(f(x)\right)^2} = 3$. Μονάδες 7

γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι: **i.** $xf(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$. Μονάδες 6

ii. $\int_0^1 f(x)dx < f(1)$. Μονάδες 4

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2005

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Μονάδες 12

2. Έστω Μ(x,y) η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z = x+yi στο μιγαδικό επίπεδο.

Τι ορίζουμε ως μέτρο του z; Μονάδες 3

Β. *Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **(Σ)**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **(Λ)**, αν αυτή είναι λανθασμένη.*

1. Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$. Μονάδες 2

2. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_o)$, όταν $f(x) < f(x_o)$ για κάθε $x \in A$. Μονάδες 2

3. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_o και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_o, τότε

$\lim_{x \to x_0} f(x) > \lim_{x \to x_0} g(x)$ Μονάδες 2

4. Αν z_1 και z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ Μονάδες 2

5. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ∈(α, β) τέτοιο, ώστε:

$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί: $z = \lambda^2 - 2 + (3-2\lambda)i$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $w = k+4i$, $k > 0$.

Για τους z, w ισχύουν: $Re(z) + Im(z) = 0$ και $|w| = 5$.

α. Να αποδείξετε ότι $z = -1+i$. Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι $k = 3$. Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει $z + \mu\bar{z} = 3i - w$ Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3+kx^2+3x-2$, $x\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,1). Να αποδείξετε ότι:

α. $k = -1$. Μονάδες 5

β. Η συνάρτηση f δεν έχει τοπικά ακρότατα. Μονάδες 10

γ. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (0, 1). Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{(2-\alpha)x^2-kx+2}{x-3}$ με $\alpha, k\in\mathbb{R}$ και $x \neq 3$.

α. Αν η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $k = 3$. Μονάδες 10

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi\in(1, 2)$, στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_o = 1$. Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ. Μονάδες 12

2. Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α; Μονάδες 3

Β. *Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **(Σ)**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **(Λ)**, αν αυτή είναι λανθασμένη.*

1. Αν $z = x+yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$, τότε: $|\overline{z}| = |-z|$. Μονάδες 2

2. Αν $z = \alpha+\beta i$, τότε: $z + \overline{z} = \alpha$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Μονάδες 2

3. Αν $x \neq 0$, τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = -\infty$. Μονάδες 2

4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο Ι

$R_1=\mathbb{R} - \{x \,/\, \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει: $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$. Μονάδες 2

5. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε: $\lim\limits_{x\to x_o} (k\,f(x)) = k \lim\limits_{x\to x_o} (f(x))$

για κάθε σταθερά $k \in \mathbb{R}$. Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{x+3i}{2-i}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το x, ώστε ο αριθμός z να είναι φανταστικός. Μονάδες 10

β. Αν $x = -6$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός. Μονάδες 6

γ. Αν $x = 4$, να βρείτε το $|\overline{z}|$. Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} -x^3+1 , & x<1 \\ x^4-1 , & x \geq 1 \end{cases}$

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια. Μονάδες 6

β. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f. Μονάδες 10

γ. Να εξετάσετε, αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1,2]$. Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{kx-x^2}{4}$, με $x\in IR$, της οποίας η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο Ο(0,0) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.

α. Να αποδείξετε ότι $k = 4$. Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο, το οποίο και να βρείτε.

Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα (2,4) υπάρχει μοναδικό σημείο ξ, στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ, όπου Α(2, f(2)) και Β(4, f(4)). Μονάδες 10

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

Να αποδείξετε ότι:

• Αν f΄(x)>0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

• Αν f΄(x)<0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ. Μονάδες 10

Α.2 Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ’ ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ; Μονάδες 5

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z^2$. Μονάδες 2

β. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0. Μονάδες 2

γ. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα. Μονάδες 2

δ. Ισχύει ο τύπος $\left(3^x\right)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε x ∈ IR . Μονάδες 2

ε. Ισχύει η σχέση $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β]. Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2+(x-2)^2$ με $x \geq 2$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1. Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της. Μονάδες 8

γ. i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία y = x. Μονάδες 4

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}. Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$. Μονάδες 9

ii. $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\text{Re}(z_1 \overline{z_2}) \geq -1$ Μονάδες 8

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} - \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f. Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g(x)=lnx στο σημείο Α(α,lnα) με α>0 και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^{\beta})$ με $\beta \in IR$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης f(x)=0. Μονάδες 9

δ. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες. Μονάδες 3

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2006

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Να αποδείξετε ότι: $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$, $x\in IR$. Μονάδες 10

Α.2 Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ; Μονάδες 5

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει: $\left||z_1|-|z_2|\right|\le|z_1+z_2|$ Μονάδες 2

β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o και $g(x_o)\neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o)=\frac{f(x_o)g'(x_o)-f'(x_o)g(x_o)}{[g(x_o)]^2}$.

Μονάδες 2

γ. Για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $\left[\ln|x|\right]'=\frac{1}{x}$ Μονάδες 2

δ. Μια συνάρτηση $f:A\to IR$ είναι 1–1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x. Μονάδες 2

ε. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α, β], τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\alpha)-G(\beta)$ Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$, $x\in IR$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της στο IR. Μονάδες 9

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int\frac{1}{f(x)}dx$. Μονάδες 9

γ. Για κάθε $x<0$ να αποδείξετε ότι: $f(5^x)+f(7^x)<f(6^x)+f(8^x)$. Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, που ικανοποιούν την ισότητα $(4-z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2+x+α$, $α \in IR$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία x=2.

Μονάδες 7

β. Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία x=2 τέμνει τον άξονα y΄y στο $y_o=-3$, τότε

i. να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε). Μονάδες 9

ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της εφαπτομένης (ε), του άξονα x΄x και της ευθείας $x = \frac{3}{5}$. Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ln(x+1) - (x+1)\ln x$ με $x>0$.

α. i. Να αποδείξετε ότι: $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $x > 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$. Μονάδες 12

β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$. Μονάδες 5

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $α \in (0,+\infty)$ τέτοιος ώστε $(α+1)^{α} = α^{α+1}$. Μονάδες 8

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2006

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. Μονάδες 7

Β. *Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή **Λ**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.*

1. Έστω f πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Δ και $x_0 \in \Delta$. Έστω επίσης $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$. Μονάδες 3

2. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες Μ(α, β) και Μ΄(α,–β) των συζυγών μιγαδικών $z = \alpha + \beta i$ και $\bar{z} = \alpha - \beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα. Μονάδες 3

3. Αν μια πραγματική συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Μονάδες 3

4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ με πεδίο ορισμού Δ = [0, +∞), τότε $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ για κάθε x ∈ (0, +∞). Μονάδες 3

5. Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ είναι +∞ ή –∞, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f. Μονάδες 3

6. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

• οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και

• f΄(x) = g΄(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε x∈Δ ισχύει: f(x) = g(x) + c .

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 13 = 0$ (1)

α. Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση (1). Μονάδες 9

β. Αν z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = |z_1|^2 - 2|z_1 \cdot z_2| + \sqrt{13}|\overline{z}_2| + i^{2006}$. Μονάδες 9

γ. Αν $z_1 = 2+3i$, τότε να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει: $|z - z_1| = 5$ Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{4}x + \lambda & , \quad x \le 1 \\ \dfrac{x^2 - 8x + 4}{4x} & , \quad x > 1 \end{cases}$ με $\lambda \in \mathbf{R}$

I. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbf{R}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Μονάδες 10

II. Για $\lambda = 0$

α. να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο **R**. Μονάδες 7

β. να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Για $k \in \mathbf{R}$ δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - kx^2 + 10$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$

I. Να βρεθεί η τιμή του $k \in \mathbf{R}$ για την οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Α (1, f(1)) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

Μονάδες 5

II. Για k = 3

α. να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες 8

β. να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $(-\infty, 0]$. Μονάδες 5

γ. και για κάθε $\alpha \in (14, 15)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha - 5$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (0,1). Μονάδες 7

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Αν z_1 , z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. Μονάδες 8

Α.2 Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες; Μονάδες 4

Α.3 Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$; Μονάδες 3

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α, β] και για κάθε x ε [α, β] ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$. Μονάδες 2

β. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0 . Μονάδες 2

δ. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε $\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt = f\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα. Μονάδες 2

ε. Αν α > 1 τότε $\lim_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$. Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{2 + \alpha \cdot i}{\alpha + 2i}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο O(0,0) και ακτίνα ρ =1. Μονάδες 9

β. Έστω z_1 , z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z = \dfrac{2 + \alpha \cdot i}{\alpha + 2i}$ για α = 0 και α=2 αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 . Μονάδες 8

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\left(z_1\right)^{2\nu} = \left(-z_1\right)^{\nu}$ για κάθε φυσικό αριθμό ν. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$ όπου θ ε IR μια σταθερά με $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$,$\kappa \in Z$

α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής. Μονάδες 7

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 8

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$. Μονάδες 3

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$. Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει f(0) > 0. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει g(x) > 0 για κάθε x ε [0, 1].

Ορίζουμε τις συναρτήσεις: $F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt$, x ε [0, 1], $G(x) = \int_0^x g(t)dt$, $x \in [0, 1]$.

α. Να δειχθεί ότι F(x) > 0 για κάθε x στο διάστημα (0, 1]. Μονάδες 8

β. Να αποδειχθεί ότι: $f(x)\cdot G(x) > F(x)$ για κάθε x στο διάστημα (0, 1]. Μονάδες 6

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$ για κάθε x στο διάστημα (0, 1]. Μονάδες 4

δ. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)\cdot x^5}$ Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Μονάδες 10

Α.2 Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού; Μονάδες 5

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

β. Αν f, g, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α, β], τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta g'(x)dx$$ Μονάδες 2

γ. Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε $\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)' = f(x)$ για κάθε x∈Δ. Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β) όπου Α= $\lim_{x\to a^+} f(x)$ και Β= $\lim_{x\to \beta^-} f(x)$ Μονάδες 2

ε. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και f΄(x) = g΄(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει f(x) = g(x) για κάθε x∈Δ. Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu 3x}{x} & ,x<0 \\ x^2+\alpha x+\beta\sigma\upsilon\nu x & ,x\geq 0 \end{cases}$

α. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$ Μονάδες 8

β. Αν $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha = \beta = 3$. Μονάδες 9

γ. Αν $\alpha = \beta = 3$, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x)dx$. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e\ln x$, $x > 0$.

α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 10

β. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $f(x) \geq e$ για κάθε $x > 0$. Μονάδες 7

γ. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)dt = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)dt + \int_2^4 f(t)dt$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha+\beta i$ και $z_2 = \frac{2-\overline{z_1}}{2+\overline{z_1}}$ όπου $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$. Μονάδες 9

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο. Μονάδες 6

γ. Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $\alpha\beta>0$, να υπολογισθεί ο z_1 και να δειχθεί ότι

$\left(z_1+1+i\right)^{20} - \left(\overline{z_1}+1-i\right)^{20} = 0$ Μονάδες 10

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2007

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$,$\nu\in N-\{0,1\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f(x)=\nu\cdot x^{\nu-1}$ Μονάδες 10

2. Να ορίσετε πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της. Μονάδες 5

Β. *Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **(Σ)**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **(Λ)**, αν αυτή είναι λανθασμένη.*

1. Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|z|=z\cdot\bar{z}$. Μονάδες 2

2. Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον xx΄) τέμνει τη γραφική παράστασή της το πολύ σε ένα σημείο. Μονάδες 2

3. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $x_0\in R$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$,τότε f(x)<0 κοντά στο x_0. Μονάδες 2

4. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m. Μονάδες 2

5. Έστω η συνάρτηση f(x)=ημx με πεδίο ορισμού το R, τότε f ΄(x)=–συνx, για κάθε x∈R. Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z=(λ-2)+2λi, όπου λ∈R.

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z. Μονάδες 9

β. Αν ισχύει $z+\bar{z}=2$ να βρείτε το $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$. Μονάδες 7

γ. Αν $|z|=2$ και Im(z)≠0, να βρείτε το λ. Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{4}{x}$, με x>0.

α. Να βρείτε τα όρια

i) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$ **ii)** $\lim_{x\to 2}\frac{xf(x)}{(x-2)^2}$ Μονάδες 8

β. Να βρείτε το σημείο Μ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που απέχει από το σημείο O(0,0) τη μικρότερη απόσταση. Μονάδες 9

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία y=-2x+6. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο R. Αν για κάθε x≠0 ισχύει xf(x)=x+2ημx, τότε:

α. Να βρείτε το f(0). Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι f(x)<3 για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Μονάδες 10

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=2 έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. Μονάδες 8

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Να αποδείξετε ότι: αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f + g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. Μονάδες 12

2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες; Μονάδες 5

Β. *Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη* ***(Σ)****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***(Λ)****, αν αυτή είναι λανθασμένη.*

1. Για δύο οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς α+βi και γ+δi η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματός τους ισούται με τη διαφορά των διανυσματικών ακτινών τους. Μονάδες 2

2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης –f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της f. Μονάδες 2

3. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h\circ(g\circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h\circ g)\circ f$ και ισχύει $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$. Μονάδες 2

4. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 έχουν ασύμπτωτες. Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|z-1+i| = |iz|$.

α. i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων Μ των μιγαδικών z. Μονάδες 10

ii) Να βρείτε ποια από τα σημεία Μ απέχουν από την αρχή Ο(0,0) απόσταση ίση με $\sqrt{5}$. Μονάδες 10

β. Αν Re(z)=0, τότε να δείξετε ότι z=–i. Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}, & x < 2 \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{2(x-1)}, & x \geq 2 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=2$. Μονάδες 12

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο M (0,f(0)). Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{1}{2}x - 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$. Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 8x - 2$, για κάθε x∈R.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1. Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μια μόνο ρίζα στο (0, 1). Μονάδες 9

γ. Αν για τη συνάρτηση g: R→R ισχύει ότι $f(g(x) - 3x) = f(x^2 + 2)$, για κάθε x∈R , να βρείτε το x_0 στο οποίο η g παρουσιάζει ελάχιστο. Μονάδες 8

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΜΑΪΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει: $\left(\ln|x|\right)'=\dfrac{1}{x}$ Μονάδες 10

Α.2 Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β];

Μονάδες 5

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι 1−1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}(f(x))=x$, $x\in A$ και $f(f^{-1}(y))=y$, $y\in f(A)$ Μονάδες 2

β. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. Μονάδες 2

γ. Όταν η διακινούσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο ***C*** των μιγαδικών. Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Μονάδες 2

ε. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$ τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$\left|(i+2\sqrt{2})z\right|=6$ και $|w-(1-i)|=|w-(3-3i)|$ τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z . Μονάδες 6

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w . Μονάδες 7

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$ Μονάδες 6

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. Μονάδες 3

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x=e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α. Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1)-f(x)$, για κάθε $x > 0$. Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο για την οποία ισχύει $f(x)=(10x^3+3x)\int_0^2 f(t)dt-45$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=20x^3+6x-45$ Μονάδες 8

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο ℝ. Να αποδείξετε ότι

$g''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$ Μονάδες 4

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}=f(x)+45$ και $g(0)=g'(0)=1$, τότε

i. να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$ Μονάδες 10

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1−1 Μονάδες 3

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΕΜΠΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μία συνεχής συνάρτηση σ’ ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$ Μονάδες 10

Β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού; Μονάδες 5

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες. Μονάδες 2

β. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ’ ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Μονάδες 2

γ. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x. Μονάδες 2

δ. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε: $\alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ ή $\beta=0$ Μονάδες 2

ε. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ’ ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x)-\ell)=0$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2+\beta z+\gamma=0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι β=–1 και γ=1. Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι $z_1^3=-1$ Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει: $|w| = |z_1 - \bar{z}_1|$ Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2 - 2\ln x,\ \ x > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x)\geq 1$ για κάθε $x>0$. Μονάδες 6

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Μονάδες 6

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{f(x)} & , \quad x>0 \\ k & , \quad x=0 \end{cases}$

i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής. Μονάδες 6

ii. Αν $k=-\dfrac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,e)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις: $F(x)=\int_0^x f(t)dt, x\in [0, +\infty)$, $h(x)=\dfrac{F(x)}{\int_0^x tf(t)dt}, x\in(0,+\infty)$

α. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{t-1}[f(t)+F(t)]dt=F(1)$ Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 8

γ. Αν $h(1)=2$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(t)dt < 2\int_0^2 t\,f(t)dt$ Μονάδες 6

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(t)dt=\dfrac{1}{2}F(1)$ Μονάδες 5

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 28 ΜΑΪΟΥ 2008

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1.Αν $z_1 = α + βi$ και $z_2 = γ + δi$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$. Μονάδες 7

2. Έστω f μια συνάρτηση και x_o ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_o ; Μονάδες 6

Β.*Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη* ***Σ****, αν η πρόταση είναι* ***Σωστή****, ή* ***Λ****, αν αυτή είναι* ***Λανθασμένη****.*

1.Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει: $|z_1+z_2|>|z_1|+|z_2|$. Μονάδες 3

2. Για κάθε x ∈**R**ισχύει: (ημx)΄ = – συνx. Μονάδες 3

3. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε x∈Δ ή είναι αρνητική για κάθε x∈Δ, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. Μονάδες 3

4. Αν μια συνάρτηση f είναι

- συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]
- παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και
- f(α) = f(β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ ∈ (α, β) τέτοιο, ώστε: f΄ (ξ) = 0. Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση $3z^2 + λz + μ = 0$, όπου λ, μ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Α. Αν ο αριθμός $z_1 = 1 + i$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι λ = –6, μ = 6 και να βρείτε τη δεύτερη ρίζα z_2 της εξίσωσης. Μονάδες 14

Β. Να αποδείξετε ότι: **α.** $z_1^2+z_2^2=0$ Μονάδες 6

β. $z_1^{2008}+z_2^{2008}=2^{1005}$ Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}1-x & , \; x\le 1\\ (x\text{-}1)^2 & , \; x>1\end{cases}$

Α. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι:

α. συνεχής στο σημείο $x_o = 1$ Μονάδες 8

β. παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o = 1$. Μονάδες 10

Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Α(2, 1). Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + k}{x}$, όπου k είναι πραγματικός αριθμός.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. Μονάδες 3

Β. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Μ(1, f(1)) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, να βρείτε την τιμή του k. Μονάδες 8

Γ. Για k = 1,

α. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. Μονάδες 8

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $[1, +\infty)$. Μονάδες 6

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2009

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1°

Α. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ. Μονάδες 10

Β. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; Μονάδες 5

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ Μονάδες 2

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ Μονάδες 2

γ. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{συν}x - 1}{x} = 1$ Μονάδες 2

δ. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Μονάδες 2

ε. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x \in [α, β]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου **Ω** που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x=α, x=β και τον άξονα

$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2°

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z=(2λ+1)+(2λ-1)i$, $λ \in R$

Α. α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $λ \in R$ Μονάδες 9

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο. Μονάδες 8

Β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_o$

όπου z_o ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα. Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a^x - \ln(x+1)$, x>-1 Όπου α>0 και $\alpha \neq 1$

Α. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε x>-1 να αποδείξετε ότι α = e Μονάδες 8

Β. Για α = e,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. Μονάδες 5

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$ Μονάδες 6

γ. αν $\beta, \gamma \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1, 2) Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4°

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [0, 2] για την οποία ισχύει $\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$H(x) = \int_0^x tf(t)dt, \quad x \in [0,2]$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3, & x \in (0,2] \\ 6\lim\limits_{t \to o} \frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x=0 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα [0, 2]. Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0, 2) και ότι ισχύει

$G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}$, 0<x<2 Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός α∈(0, 2) τέτοιος ώστε να ισχύει Η(α)=0. Μονάδες 7

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός ξ∈(0, α) τέτοιος ώστε να ισχύει

$\alpha\int_0^\xi tf(t)dt=\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt$ Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΛΙΟΥ 2009

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει:

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ Μονάδες 9

Β. Έστω μια συνάρτηση f και x_o ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_o ; Μονάδες 6

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $\overline{(z^{\nu})}=(\overline{z})^{\nu}$ Μονάδες 2

β. Η συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο. Μονάδες 2

γ. Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_o τότε $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ Μονάδες 2

δ. Έστω η συνάρτηση f(x) = εφx. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1=R-\{x \,/\, συνx=0\}$ και ισχύει $f'(x)=-\dfrac{1}{συν^2 x}$ Μονάδες 2

ε. Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει $\int f'(x)dx=f(x)+c,\ x\in\Delta$ όπου c είναι μια πραγματική σταθερά. Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $(2-i)z+(2-i)\overline{z}-8=0$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z = x+yi οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση. Μονάδες 10

β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό z_1 και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό z_2 οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση. Μονάδες 8

γ. Για τους αριθμούς που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι

$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=40$ Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln[(\lambda+1)x^2+x+1]-\ln(x+2),\ x>-1$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με λ-1.

Α. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 5

Β. Έστω ότι λ = -1

α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μονάδες 10

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+\alpha^2=0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha\neq 0$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται μια συνάρτηση $f:[0,2]\to R$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες

$f''(x)-4f'(x)+4f(x)=kxe^{2x},\ 0\leq x\leq 2,\quad f'(0)=2f(0),\ f(2)=2f(2)+12e^4,\ f(1)=e^2$

όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=3x^2-\dfrac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}},\ 0\leq x\leq 2$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [0,2]. Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ∈(0,2) τέτοιο, ώστε να ισχύει $f''(\xi)+4f(\xi)=6\xi e^{2\xi}+4$ Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι k = 6 και ότι ισχύει g(x) = 0 για κάθε x∈ [0,2]. Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3e^{2x},\ 0\leq x\leq 2$

Μονάδες 5

ε. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \dfrac{f(x)}{x^2}dx$ Μονάδες 4

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΤΗ 26 ΜΑΪΟΥ 2009

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ; Μονάδες 5

2. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f + g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

Μονάδες 8

Β. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή **Λ**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

1. $|z|^2 = z^2$, για κάθε μιγαδικό αριθμό z. Μονάδες 3

2. Η εικόνα του μιγαδικού αριθμού α+βi, α, β $\in\mathbb{R}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι το σημείο Μ (α ,β). Μονάδες 3

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 0$. Μονάδες 3

4. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β),τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(α, β) τέτοιο, ώστε : $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 2+3i$ και $z_2 = (1-i)^2 + 3i^{2009} + 1$

α. Να αποδείξετε ότι $z_2 = 1 + i$. Μονάδες 8

β. Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $\overline{z_1} - z_2$. Μονάδες 7

γ. Να εκφράσετε το πηλίκο $\dfrac{z_1}{z_2}$ στη μορφή κ+λi , όπου κ, λ $\in\mathbb{R}$. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x \le 1 \\ 2x+3, & x > 1 \end{cases}$ α, β$\in\mathbb{R}$.

α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$,να αποδείξετε ότι α + β=5. Μονάδες 5

β. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι α = 1 και β = 4. Μονάδες 10

γ. Για α = 1 και β = 4, να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x\neq 0$ στο $-\infty$ και στο $+\infty$. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Για $\lambda\in\mathbb{R}$ δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\lambda x^2-3x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

Ι. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, να βρείτε την τιμή του λ. Μονάδες 4

ΙΙ .Για λ = 0

α. να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες 8

β. να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες προς την ευθεία y = 9x. Μονάδες 8

γ. να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-\sqrt{x}=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο ανοικτό διάστημα (0 , 1) . Μονάδες 5

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΤΕΤΑΡΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2010

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Μονάδες 6

Α2. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ; Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών α+βi και γ+δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β), όπου $A = \lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x\to\beta^-} f(x)$

δ) $(\text{συν}x)' = \text{ημ}x, \ x \in \mathbb{R}$

ε) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$ όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$

Β1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης. Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010}+z_2^{2010}=0$ Μονάδες 6

Β3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει $|w-4+3i|=|z_1-z_2|$ τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο. Μονάδες 7

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β3**, να αποδείξετε ότι $3\le|w|\le 7$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f. Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$ Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα ψ΄ψ.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} xf(x)dx$ Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x)\neq x \quad f(x)-x=3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$f'(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-x},\ x\in\mathbb{R}$ Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\left(f(x)\right)^2-2xf(x),\ x\in\mathbb{R}$, είναι σταθερή.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9},\ x\in\mathbb{R}$ Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x+1} f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt,\ x\in\mathbb{R}$ Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = ημx$, $x \in IR$, είναι παραγωγίσιμη στο IR και ισχύει $(ημx)' = συνx$. Μονάδες 8

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της; Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 3

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $f(x) = α^x$, $α > 0$, τότε ισχύει $(α^x)' = xα^{x-1}$

β) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε πάντοτε ισχύει fog = gof

γ) Αν $\lim\limits_{x \downarrow x_o} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \downarrow x_o} \frac{1}{f(x)} = 0$

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [α,β]$, τότε $\int_α^β f(x)dx \geq 0$

ε) Για κάθε $z \in C$ ισχύει $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν

$z_1 + z_2 = -2$ και $z_1 \cdot z_2 = 5$

Β1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 Μονάδες 5

Β2. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση $|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$ να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x+1)^2 + y^2 = 4$ Μονάδες 8

Β3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β2** να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει $2 \cdot Re(w) + Im(w) = 0$ Μονάδες 6

Β4. Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος **Β2** με την ιδιότητα $|w_1 - w_2| = 4$, να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = 2$. Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3,\ x > 0$

Γ1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$. Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες. Μονάδες 6

Γ4. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος **Γ3** με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$ και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f: \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο IR με $f(0)=1$ και $f'(0)=0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{x \cdot \int_0^1 f(xt)dt + x^3}{ημ^3 x} = +\infty$ Αν επιπλέον δίνεται ότι $f'(x) + 2x = 2x \cdot (f(x)+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^2} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ Μονάδες 8

Δ4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt$, $x \geq 0$ και να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση $\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt + \int_6^4 f(t)dt < 0$ Μονάδες 7

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑΣ Β΄)

ΤΡΙΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2010

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Μονάδες 10

Α2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; Μονάδες 5

Α3. *Για καθεμιά από τις επόμενες πέντε (5) προτάσεις,* ***α.*** *έως* ***ε.****, να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη* ***Σ****, αν η πρόταση είναι* ***Σωστή****, ή* ***Λ****, αν αυτή είναι* ***Λανθασμένη****.*

α. Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο Α των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης.

β. Για κάθε συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε πραγματικό αριθμό c, ισχύει ότι: $\left(cf(x)\right)' = f'(x)$, για κάθε x ∈ Δ.

γ. Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί με $z_2 \neq 0$, τότε ισχύει ότι: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

δ. Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα [α, β] είναι το κλειστό διάστημα [m, M], όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της.

ε. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ τότε f(x)<0 κοντά στο x_0. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$.

Β1. Αν ισχύει ότι $2z - i\,\overline{z} = 3$, τότε να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z. Μονάδες 8

Β2. Αν $z = 2 + i$, τότε να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w για τους οποίους ισχύει ότι: $|w + z| = |z^2|$. Μονάδες 7

Β3. Αν $z = 2 + i$ και $u = \frac{\overline{z} + iz}{\overline{z} - 1}$, τότε να αποδείξετε ότι: $u^{2010} = -1$. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x + συνx - 2, \quad x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$.

Μονάδες 10

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x^2+8)=f(6x)$ Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x}$ Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x}+2x, \quad x\neq 0$. Να βρείτε:

Δ1. Τα τοπικά ακρότατα της f. Μονάδες 8

Δ2. Τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. Μονάδες 8

Δ3. Την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(1, f(1)). Μονάδες 4

Δ4. Το σημείο Μ(ξ, f(ξ)), ξ>0, της γραφικής παράστασης C_f της f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(1, f(1)), Β(3, f(3)). Μονάδες 5

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΕΜΠΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και f(α)≠f(β), να δείξετε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=$**η**. Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow \alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$

β) Για κάθε συνάρτηση f η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα τμήματα της C_f, που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x, και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x, των τμημάτων της C_f, που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

γ) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_o, και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_o, τότε ισχύει: $\lim_{x \downarrow x_0} f(x) \le \lim_{x \downarrow x_0} g(x)$

δ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o και $g(x_o)\neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f(x_0)g'(x_0)-f'(x_0)g(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}$

ε) Έστω P(x), Q(x) πολυώνυμα διάφορα του μηδενικού. Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή P(x) μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρανομαστή, έχουν πλάγιες ασύμπτωτες. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f: [α, β]→ $\mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha<0<\beta$, η οποία είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β). Αν ισχύει f(α)=5β και f(β)=5α, να αποδείξετε ότι:

Β1. Η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β). Μονάδες 10

Β2. Υπάρχει σημείο Μ(ξ, f(ξ)) της γραφικής παράστασης C_f της f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία ε: x–5y+2010=0 Μονάδες 10

B3. Η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{5}{2}(\alpha+\beta)$ Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την εξίσωση $z^2-6z+\gamma=0$ με $\gamma\in\mathbb{R}$, η οποία έχει ρίζες τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 με $Im(z_1) > 0$ και $|z_1| = 5$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\gamma=25$. Μονάδες 8

Γ2. Αν $\gamma=25$, να βρείτε τις ρίζες της παραπάνω εξίσωσης. Μονάδες 5

Γ3. Αν για τον μιγαδικό αριθμό w ισχύει $|w - z_1| = |w - z_2|$, να αποδείξετε ότι $w\in\mathbb{R}$.
Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $(z_1-2-3i)^8 + (z_2-4+5i)^8$. Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+3)\sqrt{9-x^2}$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε την παράγωγο της f:

α. στο ανοικτό διάστημα $(-3, 3)$ (Μονάδες 3)

β. στο σημείο $x_o = -3$ (Μονάδες 3) Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f. Μονάδες 9

Δ4. Να βρείτε τα ακρότατα της f. Μονάδες 6

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄) ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$ Μονάδες 10

Α2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο R. Πότε η ευθεία y=λx+β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο ∞+ ; Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0=1$

β) Μια συνάρτηση $f:A \to R$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή : αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε $x \in R_1 = R - \{x \mid συν\, x=0\}$ ισχύει : $(εφx)' = -\dfrac{1}{συν^2x}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ημx}{x}=1$

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-3i| + |\bar{z}+3i| = 2 \text{ και } w = z - 3i + \frac{1}{z-3i}$$

Β1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z}+3i = \dfrac{1}{z-3i}$ Μονάδες 4

Β3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$ Μονάδες 8

Β4. Να αποδείξετε ότι: $|z-w| = |z|$ Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση : $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right) = f'(x) + xf''(x)$ για κάθε $x \in R$.

Γ 1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ln(e^x-x)$ $x\in R$ Μονάδες 8

Γ 2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες 3

Γ 3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Γ 4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x-x)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : R\to R$, οι οποίες για κάθε $x\in R$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

i) $f(x)>0$ και $g(x)>0$

ii) $\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$

iii) $\frac{1-g(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$

Δ 1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R και ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in R$. Μονάδες 9

Δ 2. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=e^x$, $x\in R$ Μονάδες 4

Δ 3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$ Μονάδες 5

Δ 4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=\int_1^x f(t^2)\,dt$ τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$.

Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣΓ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x)=συνx είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

(συνx)΄ = ημx Μονάδες 10

Α2. Έστω μία συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας της f στο Δ. Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

i. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z = α + βi, α, β $\in\mathbb{R}$ ισχύει $z-\bar{z}=2\beta$

ii. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A$

iii. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

iv. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και f(x)>0 κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$

v. Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z-i|=1+Im(z)$ (1) και

$w(\bar{w}+3i)=i(3\bar{w}+i)$ (2)

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y=\frac{1}{4}x^2$ Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0, 3) και ακτίνα $\rho=2\sqrt{2}$. Μονάδες 7

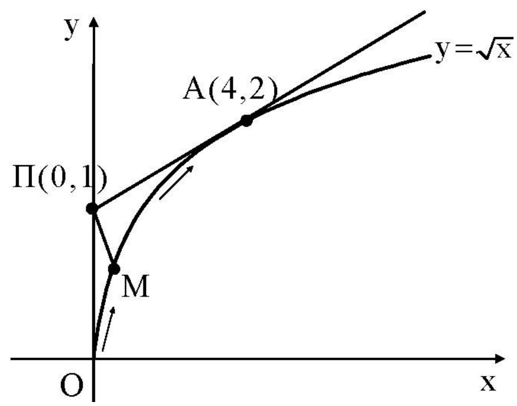
Β3. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με z =w. Μονάδες 5

B4. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ, έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ, Α, Λ, Β να είναι τετράγωνο. Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\sqrt{x}$, $x\geq 0$.

Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση Π(0, 1) ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, $t\geq 0$ είναι $x'(t)=16$m/min.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t, $t\geq 0$ δίνεται από τον τύπο: $x(t)=16t$ Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το Α(4, 2) και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α. Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ κατά την οποία η απόσταση d=(ΠΜ) του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη. Μονάδες 7

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1+f(0)$

ii) $f'(0) < f(1) - f(0)$ και

iii) $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$. Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Μονάδες 5

Αν επιπλέον $g(x)=f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$ τότε:

Δ3. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το : $\lim_{x \to 0} \frac{ημx}{xg(x)}$ Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx > 2$ Μονάδες 5

Δ5. Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=1 είναι $E(\Omega)=e-\frac{5}{2}$ τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει $ξ \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε Μονάδες 6

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄) ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι:

$f'(x_0) = 0$ Μονάδες 10

Α2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο ℝ. Πότε η ευθεία y=λx+β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞; Μονάδες 5

*Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

i. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0=1$

ii. Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

iii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x/συνx=0\}$ ισχύει: $(εφx)' = -\dfrac{1}{συν^2x}$

iv. Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ημx}{x} = 1$

v. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄. Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$|z-3i| + |\bar{z}+3i| = 2$ και $w = z - 3i + \dfrac{1}{z-3i}$.

Β1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z} - 3i = \dfrac{1}{z-3i}$ Μονάδες 4

Β3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$ Μονάδες 8

Β4. Να αποδείξετε ότι: $|z-w| = |z|$ Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$, $x\neq 0$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A\left(2,f(2)\right)$. Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-3}{x^2-1}$ Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x)+xf'(x)=\eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=xf(x)+\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$. Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}$, $x\in\mathbb{R}$ και $x\neq 0$ Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $1-\sigma\upsilon\nu x=x\eta\mu x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε: $\xi\eta\mu\xi+\sigma\upsilon\nu\xi=1+\frac{2}{\pi^2}\xi^2$

Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=συνx$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(συνx)' = -ημx$

Μονάδες 10

Α2. Έστω Μ (x,y) η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z=x+yi$ στο μιγαδικό επίπεδο. Να διατυπώσετε τον ορισμό του μέτρου του μιγαδικού αριθμού z

Μονάδες 5

*Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

i. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z=α+βi$, $α,β \in \mathbb{R}$ ισχύει $z-\bar{z}=2β$

ii. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

iii. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι και 1−1 στο διάστημα αυτό.

iv. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$

v. Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-i|=1+Im(z) \quad (1) \quad \text{και} \quad w(\bar{w}+3i)=i(3\bar{w}+i) \quad (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y=\frac{1}{4}x^2$

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0, 3) και ακτίνα $ρ=2\sqrt{2}$.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με z =w.

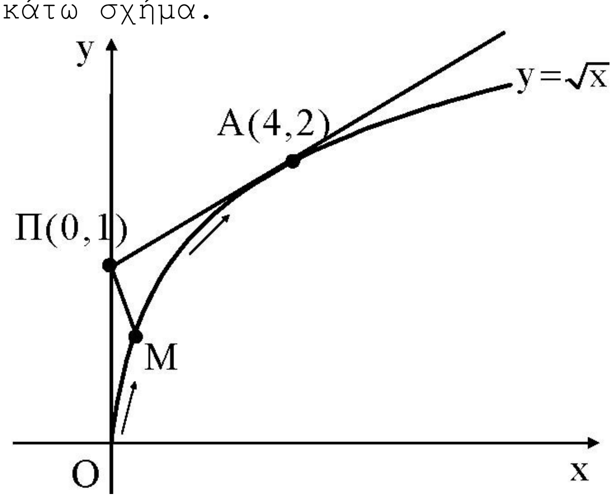
Μονάδες 5

Β4. Αν Λ είναι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού u=–i στο μιγαδικό επίπεδο, τότε να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ, Α, Λ, Β είναι τετράγωνο.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\sqrt{x}$, $x\geq 0$.
Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση Π(0, 1) ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, $t\geq 0$ είναι $x'(t)=16$m/min.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t, $t\geq 0$ δίνεται από τον τύπο: $x(t)=16t$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το Α(4, 2) και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y(t) του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, $t>0$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του κινητού είναι 4m/min.

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ κατά την οποία η απόσταση d=(ΠΜ) του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες 7

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha}{x^2}-\frac{1}{x-\beta}$ όπου α, β ακέραιοι αριθμοί. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της $A\left(-2,\frac{5}{12}\right)$ δέχεται εφαπτομένη της οποίας ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\frac{5}{18}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι α=1 και β=4.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Μονάδες 7

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\kappa x^3+(1-4\kappa)x^2-x+4=0 \quad (1)$$

είναι ισοδύναμη με την $f(x)=\kappa$, $\kappa\in\mathbb{R}$ και, στη συνέχεια, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β];

Μονάδες 4

Α3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό,*** *αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος,*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

i. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

ii. Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

iii. Αν είναι $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0

iv. $(\sigma\varphi x)'=\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x\in\mathbb{R}-\{x \mid \eta\mu x\neq 0\}$

v. $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β]

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \quad (1)$$

$$|w-5\overline{w}|=12 \quad (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 1,.

Μονάδες 6

Β2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$, τότε να βρείτε το $|z_1+z_2|$.

Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Μονάδες 6

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1 \leq |z - w| \leq 4$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)\ell nx - 1,\ x>0$

Γ1.Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 6

Γ2.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, $x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

Γ3.Αν x_1, x_1 με $x_1< x_1$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,\ x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0) + f(x_0) = 2012$$

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$ με $x>0$, τον άξονα x΄x και την ευθεία x=e.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x>0$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\ell nx-x=-\left(\int_1^x \frac{\ell nt-t}{f(t)}dt+e\right)\cdot|f(t)|$

Δ1.Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 10

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ell nx - x)$, $x>0$, τότε:

Δ2.Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2\,\eta\mu\frac{1}{f(x)}-f(x)\right]$

Μονάδες 5

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ell nx \le x-1$, που ισχύει για κάθε x>0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt, \quad x>0$$

όπου α>0, είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$F(x) + F(3x) > 2F(2x), \text{ για κάθε } x>0 \text{ (μονάδες 4).}$$

Μονάδες 6

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός β>0. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi_0 \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$$

Μονάδες 4

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β];

Μονάδες 4

Α3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

i. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

ii. Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

iii. Αν είναι $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0

iv. Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι $f'(x)= g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει πάντα $f(x)=g(x)$ για κάθε $x_0 \in \Delta$

v. Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z - 3|^2 + |z + 3|^2 = 36 \qquad (1)$$

$$|2w - 1| = |w - 2| \qquad (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 3.

Μονάδες 8

Β2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1-z_2|=3\sqrt{2}$, τότε να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

Μονάδες 9

Β3.Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 1.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2}{x}+\alpha x^2+\beta$, $x>0$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Γ1.Αν είναι $\alpha<0$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Μονάδες 4

Γ2.Αν είναι $\alpha<0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 7

Γ3.Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f:

- **i)** έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη για κάθε α,β, την οποία και να βρείτε (μονάδες 3)
- **ii)** έχει οριζόντια ασύμπτωτη μόνο για $\alpha=0$ και $\beta\in\mathbb{R}$, την οποία και να βρείτε (μονάδες 3)

Μονάδες 6

Γ4.Να βρείτε τις τιμές των α,β για τις οποίες η f παρουσιάζει στο σημείο $x_0=1$ τοπικό ακρότατο, το $f(x_0)=7$. Στη συνέχεια να καθορίσετε το είδος του ακροτάτου αυτού.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f''(x) > -2$
- $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\eta\mu x}{x^2-x}=2$
- $f(1)=f'(0)$

Δ1.Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ και $f(1)= -3$.

Μονάδες 8

Δ2.Αν η $g(x)=f(x)+\alpha(x+1)^2$, $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [0,1], να βρείτε τον αριθμό α.

Μονάδες 5

Δ3.Για $\alpha=1$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=2-(\xi+1)$

Μονάδες 6

Δ4.Για $\alpha=1$ να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο ξ του προηγούμενου ερωτήματος.

Μονάδες 6

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν f΄(x)>0 στο (α, x_0) και f΄(x)<0 στο (x_0, β), τότε να αποδείξετε ότι το f(x_0) είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 2

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 6

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ***Σωστό,*** *αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος,*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

i. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης −f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της f.

ii. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών α+βi και γ+δi είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

iii. Αν είναι 0<α<1 τότε $\lim_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$

iv. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

v. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, με z≠−1 για τους οποίους ο αριθμός $w = \frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι:

Β1. $|z|=1$

Μονάδες 7

Β2. Ο αριθμός $\left(z - \frac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 6

Β3. $\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \le 4$ όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z

Μονάδες 6

B4.Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u, για τους οποίους ισχύει $u-ui=\frac{i}{w}-w$, $w\neq 0$ ανήκουν στην υπερβολή $x^2-y^2=1$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$xf(x)+1= e^x, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Γ1.Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

Μονάδες 6

Γ2.Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 6

Γ3.Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0,f(0)). Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2f(x)=x+2,\ x\in\mathbb{R}$$

έχει ακριβώς μία λύση.

Μονάδες 8

Γ4.Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x(\ell nx)\ell n(f(x))\right]$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ με $A=(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν σχέσεις:

- $f(A) = (-\infty,0]$
- η παράγωγος της f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, και
- $2f(x)+\left(x+\frac{1}{x}\right)e^{f(x)}=\int_1^x e^{f(t)}f'(t)\left(t+\frac{1}{t}\right)dt+2$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $F(x)=\int_1^x f(t)dt$, $x>0$

Δ1.Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ell n\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$, $x>0$

Μονάδες 8

Δ2.Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της F έχει μοναδικό σημείο καμπής $\Sigma(x_0,F(x_0))$, $x_0>0$, το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ $\in(x_0,\beta)$ με $\beta>x_0$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο Μ(ξ,F(ξ)) να είναι παράλληλη προς την ευθεία

$$\varepsilon:\ F(\beta)x-(\beta-1)y+2012(\beta-1)=0$$

Μονάδες 6

Δ3. Αν $\beta>1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)]x^5}{x-1}+\frac{(\beta-1)(x+1)^3}{x-3}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα, ως προς x, στο διάστημα (1,3)

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt \le \int_1^x tf(t)dt\text{, για κάθε } x>0$$

Μονάδες 6

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν z_1 , z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 2

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 6

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ***Σωστό,*** *αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος,*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

i. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της f.

ii. Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών α+βi και γ+δi είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

iii. Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots\alpha_1 x+\alpha_0$ με $\alpha_\nu \neq 0$ ισχύει: $\lim_{x\to+\infty} P(x)=\alpha_0$

iv. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

v. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, με $z \neq -1$ για τους οποίους ο αριθμός $w=\frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι:

Β1. $|z|=1$

Μονάδες 9

Β2. $\bar{z}=\frac{1}{z}$ και ότι ο αριθμός $\left(z-\frac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 8

Β3. $\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)(z_1+z_2)\leq 4$ όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\begin{cases} x^3+\alpha & ,x<1 \\ (x-\beta)^2 & ,x\geq 1 \end{cases}$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

η οποία είναι συνεχής στο $x_0=1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\beta^2 - 2\beta = \alpha$ και ότι $\alpha \geq -1$

Μονάδες 6

Γ2. Αν $-1\leq\alpha\leq1$, να αποδείξετε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[-1,1]$

Μονάδες 8

Γ3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να βρείτε τα a και β

Μονάδες 6

Γ4. Αν $\alpha = \frac{5}{4}$ και $\beta = -\frac{1}{2}$ να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, f(1))$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,1)$ συνάρτηση f με $f(0) = -3$ και η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{1-x^2}f(x)$, $x\in(-1,1)$ με $g(x) \leq \beta x-3$, $x\in(-1,1)$, όπου $\beta\in\mathbb{R}$

Δίνεται επιπλέον ότι η παράγωγος f' της f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,1)$.

Δ1. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινό σημείο με τετμημένη $x_0=0$ και κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι $g'(0)=\beta$ και ότι η κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0=0$ είναι η $y=\beta x-3$

Μονάδες 8

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=\beta$, $x\in(-1,1)$, έχει μοναδική ρίζα το 0

Μονάδες 4

Δ4. Να δείξετε ότι $f(x)\geq \beta x-3$, για κάθε $x\in(-1,1)$

Μονάδες 7

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού(Θ.Μ.Τ.)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η εξίσωση $|z - z_o| = \rho$, ρ > 0 παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο Κ (z_o) και ακτίνα ρ^2, όπου z, z_o μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν $\lim_{x \to x_o} f(x) < 0$ <, τότε f (x) < 0 κοντά στο x_o

γ) Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in R$

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z - 2)(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι κύκλος με κέντρο Κ(2,0) και ακτίνα ρ = 1. (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 3$. (μονάδες 3)

Μονάδες 8

Β2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 , z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta, \gamma \in R$, και

$|Im(z_1) - Im(z_2)| = 2$

τότε να αποδείξετε ότι: β = − 4 και γ = 5

Μονάδες 9

Β3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς α_o , α_1 , α_2 οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **Β1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός ν ικανοποιεί τη σχέση:

$\nu^3 + \alpha_2 \nu^2 + \alpha_1 \nu + \alpha_0 = 0$ τότε να αποδείξετε ότι: $|\nu| < 4$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : R \to R$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in R$
- f (0) = 1 και

- $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$, $x \in R$

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(g(x)) = 1$

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \text{εφ} x_0$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f : (0, +\infty) \to R$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$
- $f(1) = 1$
- $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = \int_{\alpha}^{x} \frac{f(t)-1}{t-1}dt$, $x \in (1, +\infty)$ και $\alpha > 1$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1) = 0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ2. η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο R

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du \quad \text{(μονάδες 6)}$$

Μονάδες 9

Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha - 1) \int_{\alpha}^{x} \frac{f(t)-1}{t-1}dt = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha) , \; x > 1$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

Α3. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|\overline{z}| = |-z|$

(μονάδες 2)

β) Αν μια συνάρτηση f είναι 1−1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

(μονάδες 2)

γ) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0} \left(-f(x)\right) = +\infty$

(μονάδες 2)

δ) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)$$

(μονάδες 2)

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν η εξίσωση

$$2x^2 - |w-4-3i|x = -2|z|, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει μια διπλή ρίζα, την x = 1

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = 1$, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο Κ(4,3) και ακτίνα $\rho_2 = 4$.

Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.

Μονάδες 5

B3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος B1 να αποδείξετε ότι:

$$|z-w| \le 10 \text{ και } |z+w| \le 10$$

Μονάδες 6

B4. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος B1 να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει:

$$\left|2z^2 - 3z + 2z\bar{z}\right| = 5$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: ℝ ⟶ ℝ για την οποία ισχύουν:

- $2xf(x) + x^2\left(f'(x) - 3\right) = -f'(x)$ για κάθε x∈ℝ
- $f(1) = \frac{1}{2}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο ℝ

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος Γ1.

Μονάδες 4

Γ3. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$$f\left(5(x^2+1)^3 - 8\right) \le f\left(8(x^2+1)^2\right)$$

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ∈(0, 1) τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{\xi^3-\xi} f(t)dt = -\xi\left(3\xi^2 - 1\right)\cdot f(\xi^3 - \xi)$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f: [0,+∞)⟶ℝ, δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο [0,+∞), για την οποία ισχύουν:

- $f(x) = x + \int_1^{\chi}\left(\int_1^{u}\frac{(f'(t))^2}{f(t)}dt\right)du$ για κάθε x > 0
- $f(x)f'(x) \neq 0$ για κάθε x > 0 και f (0) = 0

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις:

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ με } x>0 \text{ και } h(x) = \left(f'(x)\right)^3 \text{ με } x \ge 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι

$$f(x)f''(x) + 1 = \left(f'(x)\right)^2 \text{ για κάθε } x>0$$

Μονάδες 4

Δ2. **α.** Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και f′ στο $(0,+\infty)$

(μονάδες 4)

β. Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$

(μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ3. Δεδομένου ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι:

α. $g(x) \geq 2 - x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

(μονάδες 2)

β. $\int_0^1 (2-x)f(x)dx < 1$

(μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h, τον άξονα x′x και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$

Μονάδες 8

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta$$

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού(Θ.Μ.Τ.)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

i. Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_o)$ και ακτίνα ρ^2, όπου z, z_o μιγαδικοί αριθμοί.

ii. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_o

iii. Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in R$

iv. Ισχύει ότι: $\lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

v. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)(\bar{z}-2) + |z-2| = 2.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι κύκλος με κέντρο K(2,0) και ακτίνα ρ = 1. (μονάδες 5)
Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 3$. (μονάδες 3)

Μονάδες 8

Β2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 , z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta, \gamma \in R$, και $\left|\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)\right| = 2$ τότε να αποδείξετε ότι: $\beta = -4$ και $\gamma = 5$

Μονάδες 9

B3. Για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1=2+i$, $z_2=2-i$ και $u=\left(\dfrac{z_1+i}{z_1-i}\right)^{2013}$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και u

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4}{x-1}+\alpha x$ με $x\neq 1$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Γ1. Να βρείτε το α, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο
Α(2, f (2)) να είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $x - 3y + 6 = 0$

Μονάδες 6

Γ2. Αν α=1, τότε:

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατα

Μονάδες 6

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Μονάδες 8

iii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-1)f(x)-6}{x^2-1}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη

Μονάδες 7

Δ2. Η εξίσωση $f(x^3 - x + 1) = f(2)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1, 3)

Μονάδες 9

Δ3. Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στα διαστήματα [1, 2] , [2, 3] και [1, 3] , και στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1\in(1,2)$ και $\xi_2\in(2,3)$ και $\xi\in(1,3)$ τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση:

$$2f'(\xi) = f'(\xi_1) + f'(\xi_2)$$

Μονάδες 9

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2.Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

Α3. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f;

Μονάδες 4

*Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

i. Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|\bar{z}|=|-z|$

(μονάδες 2)

ii. Αν μια συνάρτηση f είναι 1–1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

(μονάδες 2)

iii. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}(-f(x))=+\infty$

(μονάδες 2)

iv. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

(μονάδες 2)

v. Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z = α+βi με α, β∈ℝ ισχύει:

$$z - \bar{z} = 2\beta$$

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν η εξίσωση

$$2x^2 - |w - 4 - 3i|x = -2|z|, \quad x\in\mathbb{R}$$

έχει μια διπλή ρίζα, την x = 1

Β1.Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ_1= 1, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο Κ(4,3) και ακτίνα ρ_2= 4.

Μονάδες 8

Β2.Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.

Μονάδες 7

Β3.Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος Β1 να αποδείξετε ότι:

$$|z - w| \leq 10 \text{ και } |z + w| \leq 10$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = \frac{1}{2}$

Γ1.Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Μονάδες 6

Γ2.Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος Γ1.

Μονάδες 4

Γ3.Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$$f\left(5(x^2+1)^3 - 8\right) \leq f\left(8(x^2+1)^2\right)$$

Μονάδες 7

Γ4.Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{f'(x)} - \kappa\right) = 5$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύουν:

- $\sqrt{x^2+1}f'(x) + \frac{xf(x)}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = 0$
- $f(0) = 0$

Δ1.Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

Μονάδες 6

Δ2.Αν $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδες 6

Δ3.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x^4 + 1) = f(3x^3 + 2x^2 + 3x)$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1) και μια τουλάχιστον ρίζα στο (1, 4)

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$4x^3 - 9x^2 = 4x + 3$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0, 4)

Μονάδες 5

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄) ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 8

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 3

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $z-\bar{z}=2\,\mathrm{Im}(z)$

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_o} \frac{1}{f(x)}=0$

γ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και α, β, γ ∈ Δ, τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$$

ε) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $2|z|^2+(z+\bar{z})i-2-2i=0,\ z\in\mathbb{C}$

Β1. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 9

Β2. Αν $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w=3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}$ είναι ίσος με -3i

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u για τους οποίους ισχύει $|u+w|=|4z_1-z_2-i|$ όπου w, z_1 , z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος Β2

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x-\ln\left(e^x+1\right), x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση $e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1}$, x∈ℝ

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο +∞ , καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο -∞.

Μονάδες 6

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=e^x\left(h(x)+\ln 2\right), x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της φ(x), τον άξονα x΄x και την ευθεία x = 1.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, & \text{αν } x\neq 0\\ 1\;, & \text{αν } x=0\end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

Δ2. Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\int_1^{2f'(x)} f(u)du=0$ έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι η x = 0.

(μονάδες 7)

β) Ένα υλικό σημείο Μ ξεκινά τη χρονική στιγμή t=0 από ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0<0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης y = f(x), $x \geq x_0$ με x = x(t), y = y(t), $t \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x(t) του σημείου Μ είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του y(t), αν υποτεθεί ότι x΄(t)>0 για κάθε $t \geq 0$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 11

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\left(xf(x)+1-e\right)^2(x-2)^2, x\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 21 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο, όμως, η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β)

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

i. Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ, όπου z_0, z μιγαδικοί αριθμοί.

(μονάδες 2)

ii. Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ Ισχύει η ισοδυναμία

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty\right)$$

(μονάδες 2)

iii. Αν είναι $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x\to -\infty} \alpha^x = 0$.

(μονάδες 2)

iv. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι κυρτή στο Δ , τότε υποχρεωτικά $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

(μονάδες 2)

v. $$\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))g'(x)$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν:

- $w = \dfrac{2z - i}{2z + i}$, $z \neq -\dfrac{i}{2}$
- w φανταστικός

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z, είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = \dfrac{1}{2}$, εκτός από το σημείο $M\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ του κύκλου

Μονάδες 10

Β2. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, του ερωτήματος Β1, να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει |w|= 1.

Μονάδες 8

Β3. Αν είναι $z=\frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι $w^4 + i\, w^7 = 0$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$

Γ1. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

Μονάδες 7

Γ3. i) Να αποδείξετε ότι, για x > 0, ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = f(4) \Leftrightarrow x^4 = 4^x$

(μονάδες 2)

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 = 4^x$, x > 0,έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$

(μονάδες 6)

Μονάδες 8

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ∈(2,4) τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)\cdot\int_2^{\xi} f(t)dt = f(\xi)\cdot\left(\sqrt{2}-f(\xi)\right)$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: A ⟶ ℝ , A = (0,+∞) με σύνολο τιμών f (A) = ℝ, τέτοια, ώστε

$$e^{f(x)}\left(f^2(x)-2f(x)+3\right)=x$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .

Για τα ερωτήματα Δ2 και Δ3 δίνεται ότι

$$f^{-1}(x)=e^x\left(x^2-2x+3\right),\ x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 7

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} , την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα y΄y , και την ευθεία x = 1

Μονάδες 9

Δ3. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A\left(x,f^{-1}(x)\right)$, $B\left(f^{-1}(x),x\right)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε x∈ℝ, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, είναι ίσο με 1

(μονάδες 3)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του x∈ℝ η απόσταση των σημείων Α, Β γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

(μονάδες 6)

Μονάδες 9

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 8

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 3

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $z-\bar{z}=2\operatorname{Im}(z)$

β) Αν $\lim_{x\to x_o} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim_{x\to x_o}\frac{1}{f(x)}=0$

γ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

δ) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

ε) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $2|z|^2+(z+\bar{z})i-2-2i=0,\ z\in\mathbb{C}$

Β1. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 9

Β2. Αν $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w=3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}$ είναι ίσος με -3i

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u για τους οποίους ισχύει $|u+w|=|4z_1-z_2-i|$ όπου w, z_1 , z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B2

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-3)^2(x-1),\ x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία
α) είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση y = 4x + 3
και
β) η τετμημένη του σημείου επαφής της με την γραφική παράσταση της f είναι ακέραιος αριθμός.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(x-1)f(x),\ x\in\mathbb{R}$έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση h με $h(x)=\dfrac{\alpha x^2-x+2}{x+1}$ και x≠1 και α∈ℝ. Αν η ευθεία με εξίσωση y= x - 2 είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο +∞, τότε
Δ1. Να αποδείξετε ότι α = 1.

Μονάδες 7

Δ2. α) Να εξετάσετε αν η ευθεία με εξίσωση y = x - 2 είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h και στο -∞ .
β) Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h .

Μονάδες 9

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x)+\dfrac{(x+3)^4}{x}=0$έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1, 0)

Μονάδες 9

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον τέτοιος $x_0 \in (\alpha,\beta)$, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_o \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

i. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε ισχύει πάντοτε ότι fog=gof.

ii. Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών α+βi και γ+δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους .

iii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$.

iv. Έστω f μία συνεχή ς συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$

v. Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = 0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_o, τότε $\lim_{x\to x_o} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$|z - 4| = 2|z - 1|.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=2.

Μονάδες 7

Β2. Αν $w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}$ όπου z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος Β1.

Να αποδείξετε ότι:

α) Ο w είναι πραγματικός και

(μονάδες 4)

β) $-4 \le w \le 4$.

(μονάδες 7)

Μονάδες 11

Β3. Αν $w = -4$ όπου w είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος Β2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τις εικόνες $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και z_3 με $z_3=2iz_1$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση

$$f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=\frac{e^2}{5}$$

έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x)$$

για κάθε $x>0$.

Μονάδες 4

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)dt, & x>0\\ 2, & x=0\end{cases}$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)[\,e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2$ για κάθε και $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2.α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

(μονάδες 3)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την ευθεία $y=x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ell n\,|f(x)|\right]$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt}{x-3}+\frac{8-3\int_0^{x} f^2(t)dt}{x-2}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2,3).

Μονάδες 7

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν

- η f είναι συνεχής στο [α,β] και
- f(α) ≠ f(β),

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον τέτοιος $x_0 \in (\alpha,\beta)$, ώστε $f(x_0) =$ **η**.

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_o \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε ισχύει πάντοτε ότι fog=gof.

β) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών α+βi και γ+δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους .

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$.

δ) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.

ε) Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_o, τότε $\lim_{x\to x_o} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$|z - 4| = 2|z - 1|.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=2.

Μονάδες 7

Β2. Αν $w=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}$ όπου z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος Β1.

Να αποδείξετε ότι:

α) Ο w είναι πραγματικός και

(μονάδες 4)

β) $-4 \le w \le 4$.

(μονάδες 7)

Μονάδες 11

Β3. Αν $w=-4$ όπου w είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος Β2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τις εικόνες $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και z_3 με $z_3=2iz_1$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f\big(f(x)\big)\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x}$$

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε τις εξισώσεις όλων των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που διέρχονται από το σημείο (3, 0).

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$xf(x)+\sigma\upsilon\nu x=1-x^2\eta\mu\frac{1}{x},\quad \text{για κάθε } x\neq 0.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}-x\eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

Μονάδες 6

Δ2. Να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(x)$ της συνάρτησης f για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = -1$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$

Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ, και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1 – 1;

Μονάδες 4

Α3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f**;**

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $z \in \mathbb{C}$, τότε $\overline{(z^\nu)} = (\overline{z})^\nu$, όπου ν θετικός ακέραιος.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$

γ) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

ε) Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β] και G είναι μία παράγουσα της f στο [α, β] τότε πάντοτε ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους ισχύουν:

- $|z - 3i|^2 - 18 = |z - 3|^2$

- $|w-i| = \mathrm{Im}(w)+1$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η ευθεία με εξίσωση $x-y-3=0$

Μονάδες 9

Β2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι η παραβολή με εξίσωση $y=\frac{1}{4}x^2$

Μονάδες 9

Β3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z-w|$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}-\ell nx, \quad x\in(0,+\infty)$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με

$$g(x)=\int_1^{h(x)}\sqrt{t^2-1}\,dt,$$

όπου $h(x)=f(x^2+1)-f(2)+1$

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)=1$$

έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες x_1, x_2

Μονάδες 6

Γ4. Αν για τις ρίζες x_1, x_2 του ερωτήματος **Γ3** ισχύει ότι $x_1<x_2$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(x_1,1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(0,\frac{3}{2}\right)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(x^2-x)\cdot f'(x)+x\cdot f(x)=1, \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ell nx}{x-1}, & 0<x\neq 1 \\ 1\ , & x=1 \end{cases}$

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{1}^{x} f(t)dt=\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt,\ \text{για κάθε}\ x\in(0,+\infty)$$

Μονάδες 4

Δ3. α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x)=-\int_{1}^{\frac{1}{x}}\frac{f(t)}{t}dt,\ x\in(0,+\infty)$$

είναι κοίλη. (μονάδες 5)

β. Έστω Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο που η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $x'x$ και την ευθεία x = 3. Να αποδείξετε ότι Ε < 2. (μονάδες 4)

Μονάδες 9

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt\geq\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{x} tf(t)dt,\ \text{για κάθε}\ x\in(0,+\infty)$$

Μονάδες 6

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = εφx$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid συνx = 0\}$ και ισχύει $(εφx)' = \dfrac{1}{συν^2 x}$

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1 – 1;

Μονάδες 4

Α3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f**;**

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $z \in \mathbb{C}$, τότε $\overline{(z^ν)} = (\overline{z})^ν$, όπου ν θετικός ακέραιος.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

γ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

ε) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|ημx| < |x|$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους ισχύουν:

- $|z - 3i|^2 - 18 = |z - 3|^2$
- $|w - i| = \mathrm{Im}(w) + 1$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η ευθεία με εξίσωση $x - y - 3 = 0$

Μονάδες 9

Β2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4}x^2$

Μονάδες 9

Β3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$.

Μονάδες 7

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ με $x \in (0, +\infty)$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g, όπου $g(x) = \sqrt{f(x) - 2}$

Μονάδες 5

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(f(x) - \frac{3}{2}\right) = 2, \quad x \in (0, +\infty)$

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(0, \frac{5}{2}\right)$

Μονάδες 7

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + \alpha x^2, \quad x \in \mathbb{R}$, όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός. Αν η f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο, τότε:

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -12$

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε τις τιμές του $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) \geq \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 8

Δ3. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^3 + 1} \quad \text{με} \quad x \in (0, +\infty)$$

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^{\nu}}\eta\mu\left(\frac{1}{x^{2}}\right)\right)$$

για τις διάφορες ακέραιες τιμές του ν.

Μονάδες 7

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 18 / 5 / 2016
ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_o) και $f'(x)<0$ στο (x_o,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f,g λέγονται ίσες.

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας , δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση , τη λέξη Σωστό , αν η πρόταση είναι σωστή , ή Λάθος , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$, αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε το $\int_\alpha^\beta f(x)dx = G(\alpha)-G(\beta)$

β) Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_o και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_o, τότε $\lim_{x\to x_o} f(x) \le \lim_{x\to x_o} g(x)$

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_o)\cup(x_o,\beta)$ είναι σταθερή στο $(\alpha,x_o)\cup(x_o,\beta)$.

δ) Μια συνάρτηση f είναι $1-1$ αν και μόνον αν , για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μία μέγιστη M και μία ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in R$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 9

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασηs της f.

Μονάδες 7

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα Β1,Β2,Β3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Η γραφική παράσταση α σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$, $x \in R$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : R \to R$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2$ για κάθε $x \in R$ και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες 8

Γ3. Αν $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1,\ x \in R$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3 , να λυθεί η εξίσωση

$$f\left(|\eta\mu x| + 3\right) - f\left(|\eta\mu x|\right) = f\left(x + 3\right) - f\left(x\right) \quad \text{όταν } x \in [0, +\infty) .$$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με συνεχή δεύτερη παράγωγο , για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi} \left(f(x) + f''(x)\right) \cdot \eta\mu x \, dx = \pi$
- $f(R) = R$ και $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$
- $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ για κάθε $x \in R$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(\pi) = \pi$ (μονάδες 4) και $f'(0) = 1$ (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ2. α) Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο R (μονάδες 4)
β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R . (μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το $\lim_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι $0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$

Μονάδες 6

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y=\ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{συν}x-1}{x}=1$.

ii. Αν $f(x) = \ln|x|$ για κάθε $x\neq 0$, τότε $f'(x) = \dfrac{1}{|x|}$ για κάθε $x\neq 0$.

iii. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

iv. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $ν\geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

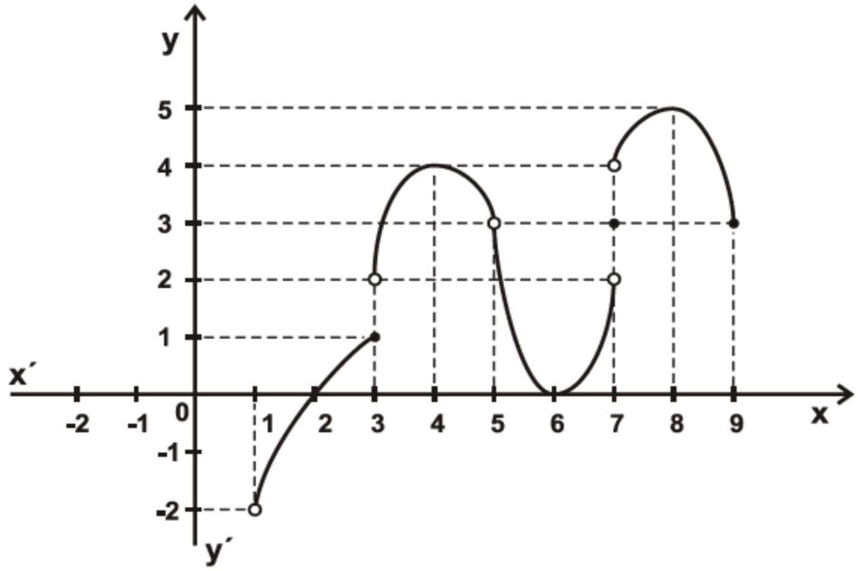
v. Για κάθε συνάρτηση f, συνεχή στο [α,β], ισχύει:

αν $\int_α^β f(x)dx > 0$, τότε $f(x)>0$ στο [α,β].

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 2

Β2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ γ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ δ) $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$ β) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$ γ) $\lim\limits_{x\to 8} f\big(f(x)\big)$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Β5. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f΄(x_0) = 0$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 (μονάδες 2) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε x>0 ισχύει:

$$f(\eta\mu x) > f\left(x-\frac{1}{6}x^3\right).$$

Μονάδες 9

Γ3. Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y= x^3$, $x\geq 0$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t>0$.

Μονάδες 4

Γ4. Αν $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx .$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{x}+1 & ,0<x<1 \\ 1 & ,x=1 \\ \dfrac{\ln x}{x-1} & ,x>1 \end{cases}$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ (μονάδες 3) και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. (μονάδες 2)

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι το $x_0=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

Μονάδες 8

Δ3. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

(μονάδες 3)

ii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=1$ και $x= x_0$, όπου x_0 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης f $f(x)=0$ στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι

$$E=\frac{-x_0^2-2x_0+2}{2}$$

(μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ4. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1, +\infty)$ να αποδείξετε ότι

$$(x+1)F(x) > xF(1)+F(x^2), \text{ για κάθε } x>1.$$

Μονάδες 5

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν f΄(x)>0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.**»**

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β];

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

i. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_o}[f(x)\cdot g(x)]=0$.

ii. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η gof ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\emptyset$.

iii. Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iv. Αν 0<α<1, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$.

v. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις και $f(x)=\ell nx$, x>0 και $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$, $x\neq 1$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

Μονάδες 5

Β2. Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ell n\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, $x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

Β3. Αν $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f(x)=−ημx, x∈[0,π] και το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το Α, τις οποίες και να βρείτε.

Μονάδες 8

Γ2. Αν (ε_1): y=−x και (ε_2): y=x−π είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**, τότε να σχεδιάσετε τις(ε_1), (ε_2) και τη γραφική παράσταση της f, και να αποδείξετε ότι

$\frac{E_1}{E_2}=\frac{\pi^2}{8}-1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1), (ε_2), και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x'x.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}$.

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι: $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e-1-\pi$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0)\\ e^x ημx, & x\in[0,\pi]\end{cases}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα [−1,π] και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x)=e^{5x}$, $x\in\mathbb{R}$, τον άξονα y'y και την ευθεία x=π.

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση: $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$.

Μονάδες 8

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_o)=0$.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάποιο $x_o \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_o)=0$, τότε το x_o είναι θέση σημείου καμπής της f**»**

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. N*α γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:*

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$, τότε

α) η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση στο (α,β).

β) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β).

γ) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α,β).

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (α,β).

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

i. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = G(\alpha) - G(\beta)$$

ii. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

iii. Αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C΄ της f^{-1}.

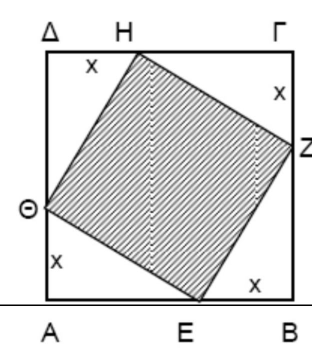
iv. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), αν $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

v. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε $f(x)=0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ:



Β1. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x)=2x^2 - 4x + 4,\ 0 \le x \le 2$$

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Μονάδες 9

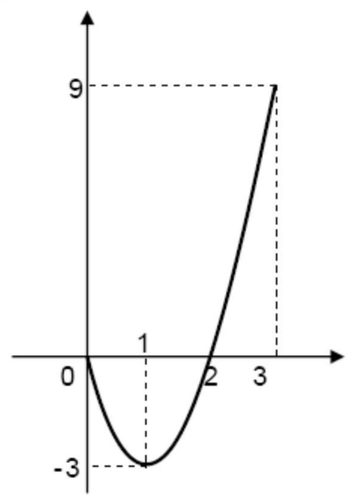
Β4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_o \in [0,2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_o)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_o}+1$ cm^2.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [0, 3], για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f′ δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- f(0)=2, f(1)=0
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της f΄ και των ευθειών x=0 και x=3 ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα [0, 3].

Γ1. Να αποδείξετε ότι f(3) = 2, f(2) = − 2 και να βρείτε, αν υπάρχουν τα, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x}$,

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)-2}$ δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 8

Γ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f .

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o \in (2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το το όριο $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}$.

Μονάδες 5

Γ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{ημx}{x}+α, & -\dfrac{π}{2}\leq x<0 \\ 2, & x=0 \\ x^3-3x^2+2, & x>0 \end{cases}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα [0, 2] ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Μονάδες 2

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

Δ2. Να βρείτε την τιμή του $α\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

Δ3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $π<\int_{\frac{-π}{2}}^{2} f(x)dx<\dfrac{3π}{2}-1$

Μονάδες 7

Δ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(\dfrac{-π}{2}\cdot x\right)=f\left(\dfrac{-π}{2}\cdot e^{-x}\right)$ έχει μοναδική λύση στο (0,1).

Μονάδες 6

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Κάθε συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι “1-1” είναι και γνησίως μονότονη.»
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)
β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελειώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
α) Η συνάρτηση f(x)= ημx με $x\in\mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.
β) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.
γ) Ισχύει $\lim_{x\to 0}\frac{1-\text{συν}x}{x}=0$
δ) Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x.
ε) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\frac{4}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Β1. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 8

Β2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δεν σβήνει)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι

$$E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\ x\in(0,8)$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με την διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με $5m^2$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2$, $x\in\mathbb{R}$ με α>1.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του α>1 η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=f(1) είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Μονάδες 6

Δ4. Αν α=2 να αποδείξετε ότι: $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx>-\frac{32}{15}$

Μονάδες 9

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

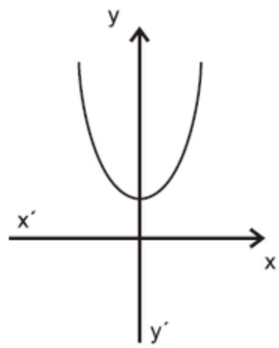
Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(α, x_o)\cup(x_o, β)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Μονάδες 7

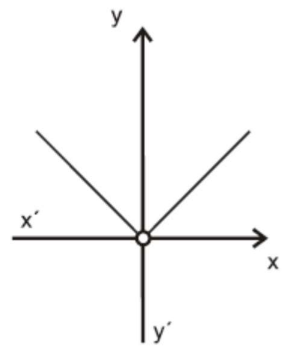
Α2. Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

Μονάδες 4

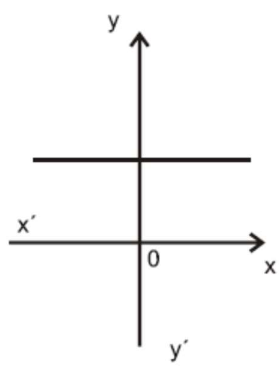
Α3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T.



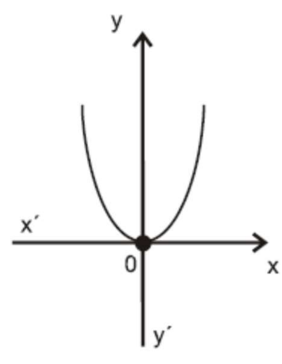
(f)



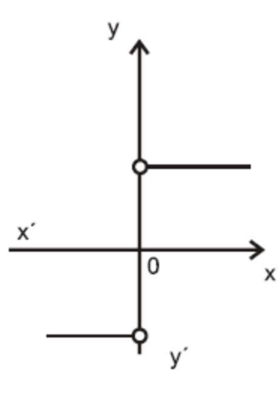
(g)



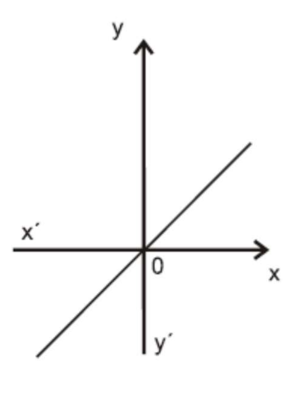
(F)



(G)



(H)



(T)

Να γράψετε στο τετράδιο σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

Μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f,g:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)] = 0$».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.

β) Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι '1-1', τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το [0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3], τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το [0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3].

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + 1, & x \leq 1 \end{cases}$

Β1. Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Μονάδες 3

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι α = 1 .

Β2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2}, 4\right]$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -\dfrac{1}{4}x + 2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, με τύπο: $f(x) = 2\eta\mu x - x$.

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_o \in [0, \pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_o, f(x_o))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x)\cdot \text{συν}x\,dx$.

Μονάδες 8

Γ4. α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$. (μονάδες 2)

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\left[(f(x)-f(2x))\cdot \ln x\right]$. (μονάδες 5)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f: (0, +∞) → ℝ, με τύπο: $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1)>\dfrac{x}{x+1}$, για κάθε x > 0.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα (0, 1).

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 2^{f(x)} - 1$, για κάθε x > 0.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)}{x-1}+\dfrac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\dfrac{\text{ημ}(\pi\alpha)}{x}=0$, όπου 0 < α < 1, έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x, μία στο διάστημα (0, 1) και μία στο διάστημα (1, 2).

Μονάδες 5

Δ5. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα (0, +∞) με F(e) = e·ln2, να αποδείξετε ότι $\ln 2 < F(1) < \ln\left(\dfrac{2^{e+1}}{e+1}\right)$.

Μονάδες 5

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

(Μονάδες 2)

β) i. Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη;

(Μονάδα 1)

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **(i),** πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f;

(Μονάδες 3)

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.* ***Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.***

α) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ με $f'(x)=0$ για κάθε $x\in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο Α.

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

β) Για κάθε συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_o \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_o .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

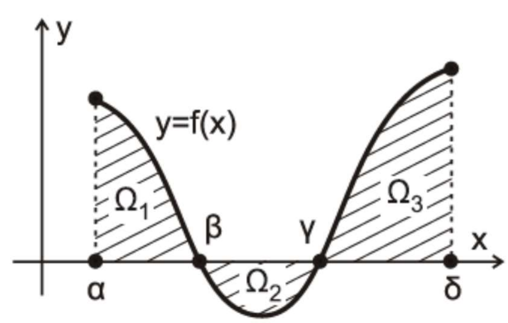
Μονάδες 8

Α5. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος. Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι $E(\Omega_1)=2$, $E(\Omega_2)=1$ και $E(\Omega_3)=3$, τότε το $\int_\alpha^\delta f(x)dx$ είναι ίσο με:

α) 6 **β)** -4 **γ)** 4 **δ)** 0 **ε)** 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2



ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-x} + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$.

Μονάδες 3

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2,3)$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Β4. Έστω $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$, $x>2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

Γ3. i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_o, η οποία είναι αρνητική.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-x_of(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_o, +\infty)$.

(Μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x\geq1$.
Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο $A(3,10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $M\overset{\Delta}{O}K$ τη χρονική στιγμή t_0, όπου $K(x,0)$ και $O(0,0)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(x-1)\ell n(x^2-2x+2) +\alpha x +\beta$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και η ευθεία
(ε): $y=-x+2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1,1)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι α=-1 και β=2.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες x=1 και x=2.

Μονάδες 5

Δ3. i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 3)

ii. Να αποδείξετε ότι $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda \geq (\lambda-1)\ell n\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\frac{3}{2}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=-x^3-x+2$, $x \in \mathbb{R}$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 8

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο $(α, x_o)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_o, β)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

Μονάδες 7

Α2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση της |f| αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.

β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα [α, β], ισχύει:

Αν $\int_α^β f(x)dx = 0$, τότε $f(x)=0$ για κάθε $x \in [α, β]$.

γ) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f .

δ) Αν $\lim_{x \to x_o} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για x κοντά στο x_o.

ε) Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2+1$ και $g : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x-2}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση gof έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$ και τύπο

$(gof)(x) = \sqrt{x^2-1}$.

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της gof στο $+\infty$.

Μονάδες 6

Β3. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο x_o= 2 της συνάρτησης h:A - {2}→ℝ με τύπο $h(x)=\frac{(gof)(x)}{x-2}$.

Μονάδες 6

Β4. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=\begin{cases}(gof)(x), & x\in A\\ 1-x^2, & x\in(-1,1)\end{cases}$. Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση t(x)=φ(x)·ημ(πx) στο διάστημα [0,2].

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f : [0, +∞) → ℝ, για την οποία ισχύει ότι $f(x)f'(x) = \frac{1}{2}$ για κάθε x>0 και της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο Μ(1,1). Έστω το σημείο $A\left(\frac{3}{2},0\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x}$, x∈[0, +∞).

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο Α τη μικρότερη απόσταση.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ και τον άξονα x΄x.

Μονάδες 7

Γ4. Δίνεται επιπλέον μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση g:[0, +∞) → ℝ, για την οποία ισχύει 0<g(x)<1 για κάθε x≥0 . Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=g(x) έχει μοναδική ρίζα x_o, η οποία ανήκει στο (0,1).

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f:ℝ→ℝ , με τύπο: $f(x)=\frac{x^3}{3x^2-3x+1}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο ℝ.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι f(x) + f(1 – x) = 1 για κάθε x∈ℝ (μονάδες 2) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x′x και την ευθεία x=1 ισούται με $\frac{1}{2}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 2f^2(x)dx<1$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση $f(\eta\mu^2 x)+f(\sigma\upsilon\nu^2 x)=f(\varepsilon\varphi x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x})$.

Μονάδες 9

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
(ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- f(α)≠(β)

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β)και υπάρχει ένας τουλάχιστον x_o ∈ (α, β) τέτοιος, ώστε $f(x_o)$= η.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε συνάρτηση f, ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει f΄(x)>0».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

(μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$ για κάθε ν∈$\mathbb{N}$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β, αντίστοιχα, τότε η gof ορίζεται, αν f(A)∩B ≠∅ .

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{|x|}$, x∈$\mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y.

δ) Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

ε) Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα x΄x . Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_o,f(x_o))$ της C_f , του οποίου η απόσταση από τον άξονα x x είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

f: (1, +∞) → $\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ και g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = e^x$.

Β1. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση fog.

Μονάδες 5

Β2. Αν $(fog)(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, με x>0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fog είναι ‘1 – 1’ και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

Β3. Αν $\varphi(x)=(fog)^{-1}(x)=\ell n\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, με x>1, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 6

Β4. Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Β3**, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x\to1^+}\varphi(x) \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}-\ell n\lambda, & x\le 0\\ \eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}\quad,\ \text{με } \lambda>0$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι λ=1.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0, 1), η οποία σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία ίση με $\dfrac{\pi}{4}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Γ4. Ένα σημείο Μ(α, f(α)) με $\alpha\le0$ κινείται στη γραφική παράσταση της f. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=-\dfrac{\alpha(t)}{3}$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Μ τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Β τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το σημείο Μ έχει τετμημένη −1.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^x+x^2-ex-1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o\in(0,\ 1)$ στην οποία η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$f(x_o)=x_o^2-(e+2)\,x_o+e-1$$

Μονάδες 7

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to x_o} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_o)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_o} \right) \right]$$

όπου x_o το σημείο του ερωτήματος Δ1 που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Μονάδες 6

Δ3. Αν x_o είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x = x_o$ για $x \in (x_o, 1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ.

Μονάδες 5

Δ4. Αν x_o είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι

$$f(x_o) > f(\rho)(f'(k) + 1) \quad \text{για κάθε } k \in (\rho, 1)$$

Μονάδες 7

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f+g)'(x_0) = (f)'(x_0) + (g)'(x_0)$$

Μονάδες 7

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και A_1 το σύνολο των σημείων του Α στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η πρώτη παράγωγος της f;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f με $\lim_{x\to x_o} f(x) = 0$, ισχύει ότι $\lim_{x\to x_o} \frac{1}{f(x_o)} = +\infty$ ή $\lim_{x\to x_o} \frac{1}{f(x_o)} = -\infty$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

(μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $\lim_{x\to x_o} f(x) = +\infty$ τότε f(x)>0 για κάθε x κοντά στο x_o.

β) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

γ) Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$, $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R} - \{3\}$.

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

Μονάδες 8

Β3. Να αποδείξετε ότι (fof)(x) = x για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{3\}$.

Μονάδες 6

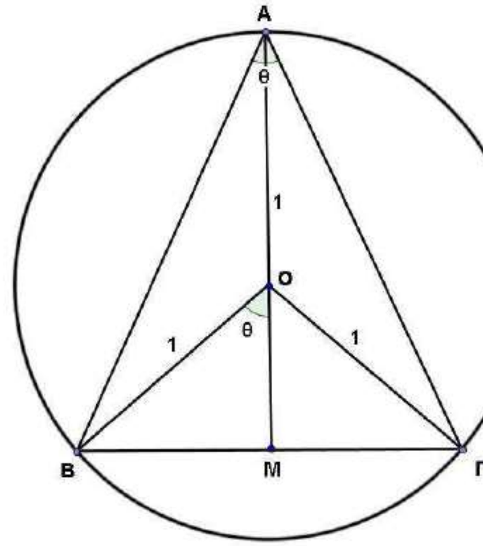
Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to -\frac{1}{3}} \left(f(x) \eta\mu \frac{1}{3x-1} \right)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ =ΑΓ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα 1 , όπως φαίνεται στο σχήμα . Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και

$B\hat{O}M = \theta$, τότε:



Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της γωνίας θ είναι :

$$E(\theta) = (1+\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta$$

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta \in (0,\pi)$, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται .

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο γωνίες θ_1, θ_2, με $\theta_1 < \theta_2$, για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\frac{3}{4}$.

Μονάδες 6

Γ4. Για τις γωνίες θ_1, θ_2, του ερωτήματος **Γ3**, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$ τέτοια, ώστε:

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right)E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right)E'(\xi_2)$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις

$f(x) = x\ell nx - \ell n(\lambda x) \quad x \in (0, +\infty) \quad \lambda \in (0, +\infty)$ και

$g(x) = x^x , \quad x \in (0, +\infty)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$, το οποίο και να βρείτε. Στην συνέχεια, να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο ακρότατου της f, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0, +\infty)$

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει

$$x^x \geq \lambda x \text{ για κάθε } x > 0.$$

Μονάδες 5

Για τα ερωτήματα Δ3 και Δ4 θεωρήστε ότι $\lambda = 1$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της g, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

Δ4. Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

i) Να αποδείξετε ότι η h είναι συνεχής (μονάδες 3)

ii) Η εξίσωση

$$x^{2020}\left(3 - 2\int_1^2 g(t)dt\right) + (1-x)\int_0^1 h(1-t)dt = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάσημα (0.1)

(μονάδες 6)

Μονάδες 9

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ισχύει $|ημx| < |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

β) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α ισχύει ότι $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, για κάθε $x \in A$.

γ) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ τότε κοντά στο $f(x)>0$.

δ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

ε) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, β], τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή, Μ, και μια ελάχιστη τιμή, m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+1)=(x+1)\cdot e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι $f(x)=x\cdot e^{1-x}$ $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 3

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε:

(i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (μονάδες 4).

(ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
(μονάδες 3).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^3-3x^2-x+1, & x\le 0\\ \sigma\upsilon\nu x, & 0<x\le \frac{3\pi}{2}\end{cases},\ \ \mu\varepsilon\ \ \alpha<-3.$$

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ2. (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ (μονάδες 3).

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x)\ge -1$, για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\ell n x=\frac{1}{x}\ \ (1)$$

έχει μοναδική ρίζα, x_0, η οποία ανήκει στο $(1,e)$.

Μονάδες 4

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ έχει τύπο $f(x)=(\ell n x_0)(x+1)-\ell n x-1$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, το $f(x_0)=0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x)=x\cdot e^{-x}, x\in\mathbb{R}\ \ \text{και}\ \ h(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}, x\in\mathbb{R}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 8

Δ4. Έστω η συνάρτηση $\varphi:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, συνεχής, με $f(x)>g(x)$, για κάθε $x>0$. Θεωρούμε τα σημεία $A(x,f(x))$ και $B(x,\varphi(x))$, με $x>0$. Αν η απόσταση των σημείων A και B γίνεται ελάχιστη στο $x=x_0$, να δείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ.

Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Αν
• Η f είναι συνεχής στο Δ και
• $f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ,
να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν f,g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$.

β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ καμπή, τότε $f''(x_0) = 0$.

δ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, ισχύει ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ και η συνάρτηση $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$, $x<0$.

Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h = g\circ f^{-1}$ είναι $h(x) = \frac{x-1}{x}$, $x<0$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 0^-}\left(e^{-h(x)}\cdot \eta\mu\frac{1}{x}\right)$ όπου h είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

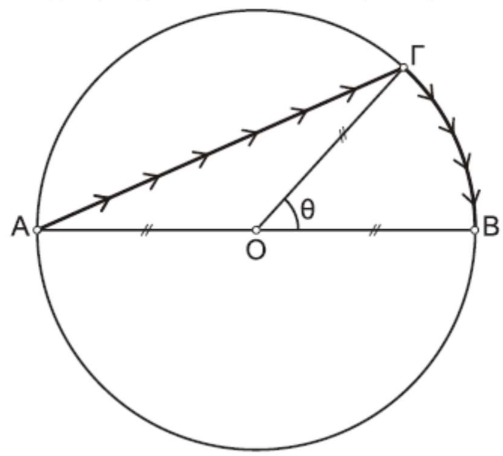
Κυκλική λίμνη έχει κέντρο Ο και ακτίνα R=1km. Ένας μαθητής μπορεί να κωπηλατεί με σταθερή ταχύτητα v_1 = 2km/h και μπορεί να βαδίζει με σταθερή ταχύτητα v_2 = 4km/h. Ο μαθητής θέλει να κάνει μια βόλτα στη λίμνη, ξεκινώντας από το σημείο Α του σχήματος και καταλήγοντας στο αντιδιαμετρικό του σημείο Β.

Ο μαθητής μπορεί:

I. Να συνδυάσει κωπηλασία και βάδισμα, κωπηλατώντας ευθύγραμμα από το σημείο Α σε σημείο Γ της περιφέρειας της λίμνης, τέτοιο ώστε η γωνία $B\hat{O}\Gamma = \theta,\ \theta \in (0, \pi)$ και στη συνέχεια να βαδίσει κατά μήκος του τόξου ΓΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

II. Να κωπηλατήσει ευθύγραμμα από το σημείο Α στο σημείο Β (θ = 0).

III. Να βαδίσει στην περιφέρεια της λίμνης από το Α στο Β (θ = π).



Γ1. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος (σε ώρες) που χρειάζεται, για να διανύσει την παραπάνω διαδρομή, ως συνάρτηση της γωνίας θ (σε ακτίνια) είναι

$$t(\theta) = \frac{1}{4}\theta + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{2}\right),\ \theta \in (0, \pi)$$

Δίνεται ότι σε έναν κύκλο ακτίνας R το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία θ (σε ακτίνια) είναι $S = R \cdot \theta$.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ ώστε ο χρόνος της βόλτας του μαθητή να γίνεται μέγιστος.

Μονάδες 9

Γ3. Σε ποια από τις επιλογές (I), (II) ή (III) ο χρόνος μετάβασης από το σημείο Α στο σημείο Β είναι ο ελάχιστος δυνατός; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x$ και συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = -x^2 + \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

για την οποία το όριο $\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt{-g(x)} + \alpha x\right)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι α = −1.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που διέρχεται από το σημείο M(-1,0) είναι η ευθεία ε : y = x + 1 (μονάδες 3).
Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι f(x) > g(x) , για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(x-1)-x}{x-k}+\frac{f(x)-g(x)}{x-k-1}=0\ ,\ k\in\mathbb{R}-\{1\}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (k, k+1).

Μονάδες 7

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x)=F(x)+c,$$

όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x)=F(x)+c,$$

με $c\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

Α3. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x)\neq 0$, για όλα τα $x\in(0,1)$, τότε $f(0)\neq f(1)$.

γ) Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $R_2=\mathbb{R}-\{x|\eta\mu x=0\}$ και ισχύει

$f'(x)=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$.

δ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=1$.

ε) Αν $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^4-2x^2+1$ και η συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση h=fog.

Μονάδες 6

Β2. Αν $h(x)=(x-1)^2$, $x\in[0,1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι "1- 1" (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h (μονάδες 6).

Μονάδες 9

Β3. Έστω $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{h^{-1}(x)}{1-x} &, \quad x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2} &, \quad x = 1 \end{cases}$

.

(i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο [0,1]. (μονάδες 6)

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = ημα$, όπου $\dfrac{\pi}{6} < α < \dfrac{\pi}{2}$. (μονάδες 4)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και για την παράγωγο f΄ της f ισχύει ότι:

$$f'(x) = \begin{cases} -2 &, \quad αν\ x < -1 \\ 3x^2 - 1 &, \quad αν\ x > -1 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} -2x - 2 &, \quad αν\ x \le -1 \\ x^3 - x &, \quad αν\ x > -1 \end{cases}$

Μονάδες 6

Γ2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $Α(x_0,f(x_0))$ με $x_0 > -1$, η οποία τέμνει τον άξονα y΄y στο –2.

Μονάδες 5

Γ3. Έστω y= 2x –2 η εξίσωση της ευθείας (ε) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο Μ(x,y) με x>2 κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε). Έστω ακόμα Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ, όπου Κ είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα x΄x και Γ είναι το σημείο με συντεταγμένες (2,0). Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο Β(3,4) ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε τη χρονική στιγμή t_0.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{ημf(x)}{f(x)} + \dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right]$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f :(0,+\infty)\to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x - \ln(3x)$$

Δ1. **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2, με $x_1 < 1 < x_2$. (μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. (μονάδες 2)

Μονάδες 8

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1, x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

Δ2. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα x΄x, να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$$

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $f(2-x_1) < 0$.

Μονάδες 4

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ έχει λύση.

Μονάδες 6

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) του Διαφορικού Λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

β) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$ κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$.

γ) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, $f'(x_0)=0$.

δ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

ε) Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

- $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{x}{x-1}$ και
- $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\ln x$.

Β1. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (e,e^2).

Μονάδες 8

Β3. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $\varphi = g \circ f$.

Μονάδες 6

Β4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση με τύπο $h(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$. Αν $\varphi(x) = \ln x - \ln(x-1)$, $x \in (1, +\infty)$ να εξετάσετε αν $\varphi = h$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - ημx}{x} = 0$.
- $f'(x)f''(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. i. Να αποδείξετε ότι f(0) =0 και $f'(0) = 1$ (μονάδες 4).

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Γ3. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} (μονάδες 5).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x + 1, & -1 \le x \le 0 \\ x^x, & 0 < x \le \frac{2}{e} \end{cases}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. **Μονάδες 6**

Δ2. i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f (μονάδες 3).

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (μονάδες 5). **Μονάδες 8**

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$ υπάρχει $\xi \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}$. **Μονάδες 5**

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x)\,dx > \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$. **Μονάδες 6**

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f '(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 6

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle (μονάδες 3) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (μονάδες 2).

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ημx}{x}=1$.

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ, ισχύει ότι f '(x) > 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

δ) Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια «ένα προς ένα» (“1-1”) συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x'Oy' .

ε) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι fog και gof, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\frac{4-e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο h(x) = lnx .

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f =goh.

Μονάδες 5

Έστω $f(x)=\frac{4-x^2}{x}$, x>0.

Β2. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι $\frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{συν(1+x^2)}{f(x)}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \dfrac{1}{x}+α \quad , & x\geq 1 \end{cases}$$

όπου α∈ℝ, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$\int_2^3 xf(x)dx=1.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι α=0.

Μονάδες 4

Γ2. **i)** Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα
$x'x$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» ("1-1") (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ4. Έστω (ε): y= -x+2 η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με x≥1, την ευθεία (ε), τον άξονα x ' x και την ευθεία x=e.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f:(0,2) → ℝ με τύπο

$$f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+κ,\ \text{όπου } κ\in\mathbb{R},$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}=\ell\in R.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι κ=3.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1<1<x_2$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1<\frac{1}{3}$ (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Στα παρακάτω ερωτήματα x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(ξ,f(ξ))$ με ξ∈(0,1) στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με $\dfrac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$.

Μονάδες 6

Δ4. Εάν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα $(0,2)$ με $F(x_1)=G(x_2)=0$, να αποδείξετε ότι

i) $F(x_2)+G(x_1)=0$ (μονάδες 4)

ii) Η εξίσωση

$$x_1 \cdot F(x)+x_2 \cdot G(x)=x_1+x_2-2x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x_1, x_2) (μονάδες 5).

Μονάδες 9

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 09 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 7

Α2. Πότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν f και g είναι δυο συναρτήσεις και ορίζονται οι σύνθετες συναρτήσεις gof και fog, τότε οι gof και fog δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

β) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}=1$.

γ) Αν συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

δ) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g,h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπους $g(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ και $h(x)=\ln x$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f με $f=g\circ h$.

Μονάδες 6

Β2. Αν $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, $x>1$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f^{-1}=f$ (όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f).

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x)=\text{συν}x$ έχει λύση στο $(1,+\infty)$.

Μονάδες 7

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

- $f(1)=0$
- $f(2)=2$
- $f'(2)=1$
- $f''(x)<0$, για κάθε $x\in[1,2]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f

i. Έχει ένα κοινό στοιχείο με την ευθεία $(\varepsilon_1): y=-x+2$ (μονάδες 3) και

ii. εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon_2): y=x$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\frac{f(x)}{x-1}>\frac{2-f(x)}{2-x}$ για κάθε $x\in(1,2)$.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι

i. $f(x)\ge 2x-2$ για κάθε $x\in[1,2]$ (μονάδες 2) .

ii. $1<\int_1^2 f(x)dx<\frac{3}{2}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} e^x , & x \geq 0 \\ -e^x+2 , & x<0 \end{cases}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_1,f(x_1))$ με $x_1>0$, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων O(0,0) έχει εξίσωση $y=e\cdot x$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) του ερωτήματος Δ1 και η γραφική παράσταση της f έχουν, εκτός από το σημείο επαφής Α, ακριβώς ένα ακόμα κοινό σημείο $B(x_0,f(x_0))$.

Μονάδες 8

Δ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την εφαπτομένη της, (ε) του ερωτήματος Δ1, ανάμεσα στις ευθείες $x=x_0$ και $x=1$. Να δώσετε την απάντησή σας ως συνάρτηση του x_0.

Μονάδες 6

Δ4. Δύο κινητά ξεκίνησαν ταυτόχρονα από το σημείο Β του ερωτήματος Δ2. Το ένα κινήθηκε κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΟ, όπου Ο η αρχή των αξόνων, και το άλλο κινήθηκε κατά μήκος της γραφικής παράστασης της f, έτσι ώστε οι τεταγμένες των θέσεών τους να παραμένουν ίσες μεταξύ τους κάθε χρονική στιγμή. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή απόσταση ανάμεσα στα κινητά κατά τη διάρκεια της κίνησής τους;

Μονάδες 6